MODUL

ANALISIS VARIABEL KOMPLEKS

Oleh:

DIDIK HERMANTO, M. Pd.

STKIP PGRI BANGKALAN

PRODI S1PENDIDIKAN MATEMATIKA

2014

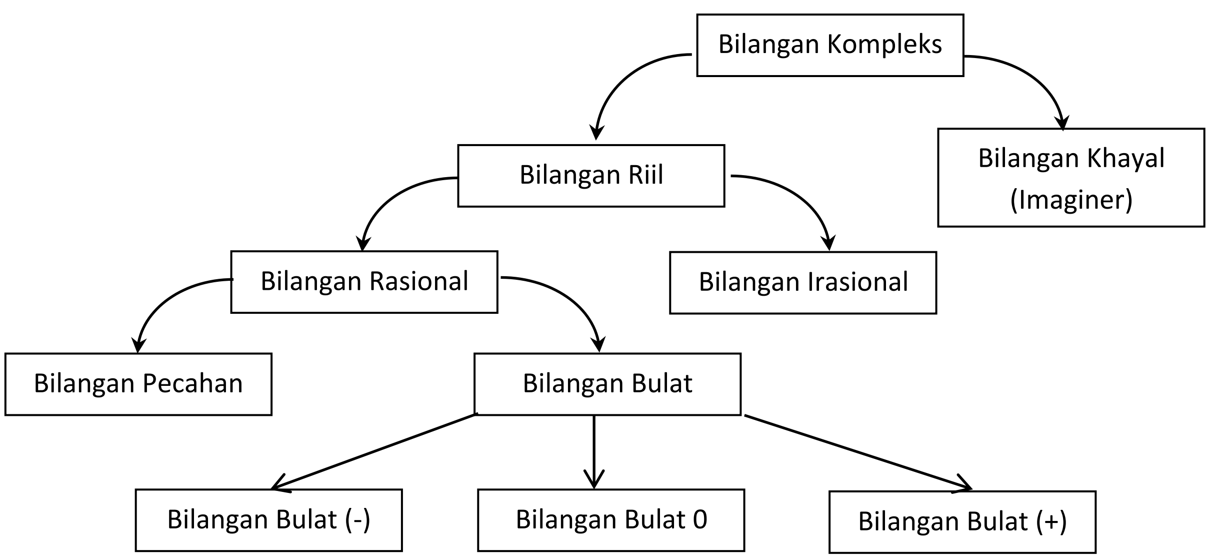
BAB I

BILANGAN KOMPLEKS

A. PENGERTIAN BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan kompleks merupakan perluasan dari system bilangan real. Munculnya bilangan kompleks ini dikarenakan adanya beberapa permasalahan, misalnya penyelesaian dari persamaan $x^2 + 4 = 0$ yang bukan merupakan anggota dari bilangan real. Oleh karena itu diperlukan bilangan baru yang dinamakan bilangan kompleks

Untuk menjelaskan hal tersebut di atas, akan ditunjukkan skema bilangan sbb:



Dari gambar di atas dapat kita lihat bahwa bilangan kompleks merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan riil dan bilangan imaginer. Bilangan kompleks dilambangkan dengan z, sehingga:

$$\boxed{z = x + yi}$$

dimana a, b $\in$ R dengan b $\neq 0$ dan i merupakan satuan khayal bersifat $i^2 = -1$

Definisi 1.1 : Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari $x + yi$, dimana $x, y \in R$ dengan $y \neq 0$ dan i adalah satuan khayal/imaginer bersifat $i^2 = -1$

Himpunan bilangan kompleks (C) = $\{z / z = x + yi$, dengan $x,y \in \acute{R}$, $y \neq 0$ dan $i^2 = -1\}$

Selanjutnya, xdinamakan bagian riil dari zdan ydinamakan bagian khayal dari z yang berturut-turut dinyatakan dengan Re(z) dan Im(z).

Catatan :

- Bilangan bulat : bilangan yang terdiri dari bilangan cacah dan negatifnya.
- Bilangan pecahan adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a/b dengan $b \neq 0$, a, $b \in B$, dan faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b adalah 1. Contohnya: 2/3. -(5/7) dll.
- Bilangan Rasional : suatu bilangan yang dapat dibentuk menjadi desimal (berakhir) atau bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a/b dengan $b \neq 0$, a, $b \in B$. Contohnya: -3, -(21/7), dll.
- Bilangan Irasional : suatu bilangan yang dapat dibentuk menjadi desimal (berulang)
- Bilangan Riil : suatu bilangan yang dapat dibentuk menjadi desimal seperti 3.2678

B. SIFAT-SIFAT BILANGAN KOMPLEKS

1. Jika Re(z) = 0 dan Im(z) $\neq$ 0, mk. bilangan kompleks z disebut bilangan imaginer murni.
2. jika R(z) = 0 dan Im(z) = 1, maka bilangan kompleks z disebut satuan khayal/imaginer.
3. jika R(z) $\neq$ 0 dan Im(z) = 0, maka bilangan kompleks z merupakan bilangan riil.
4. Kesamaan bilangan kompleks,

   Misalkan $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2\ i$

   $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

C. OPERASI ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS.

Misalkan $z_1 = x_1 + y_1.i$ dan Misalkan $z_2 = x_2 + y_2.i$

a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\ (y_1 + y_2)$

b) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\ (y_1 - y_2)$

c) $z_1 \,.\, z_2 = (x_1 + iy_1) \,.\, (x_2 + iy_2) = (x_1 \,.\, x_2 - y_1 \,.\, y_2) + i\ (x_1 \,.\, y_2 + x_2 \,.\, y_1)$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2.y_1 - x_1.y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\, i$, $z_2 \neq 0$ Kunci : $\frac{z_1}{z_2} \text{ x } \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$

D. SIFAT-SIFAT ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

Jika z_1, z_2 dan z_3 adalah bilangan kompleks, maka berlaku:

1. $z_1+z_2 \in \mathbb{C}$ dan $z_1.z_2 \in \mathbb{C}$ (sifat tertutup)
2. Ada0=0+i0$\in \mathbb{C}$, sehingga z+0=z (0 elemen netral penjumlahan)
3. Ada 1=1+i0$\in \mathbb{C}$, sehingga z . 1=z (1elemen netral perkalian)
4. Untuk setiap z=x+iy$\in \mathbb{C}$, ada z^{-1}=sehinggaz .z^{-1}=1
5. Untuk setiap z=x+iy$\in \mathbb{C}$, ada ⁻z=⁻x⁻iy sehingga z+(⁻z)=0
6. Hukum komutatif : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
7. Hukum assosiatif : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $z_1(z_2 . z_3) = (z_1. z_2)z_3$
8. Hukum distributif : $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1. z_2 + z_1. z_3$
9. Hukum kesekawanan (konjugat) : Jika z = x + yi , maka konjugat z : $\bar{z}$ = x - yi
   a. $\bar{\bar{z}} = z$
   b. Konjugat $(z_1 + z_2)$ = konj $\{(x_1 + y_1.i) + (x_2 + y_2.i)\}$ = konj $\{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i\}$
      $= (x_1+ x_2) - (y_1 + y_2)\, i = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   c. Konjugat $(z_1 - z_2)$ = konj $\{(x_1 + y_1.i) - (x_2 + y_2.i)\}$ = konj $\{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i\}$
      $= (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\, i = (x_1 - y_1.i) - (x_2 - y_2.i) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
   d. Konjugat $(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$dimana$\overline{z_2} \neq 0$

$$= \text{konj } (\frac{x_1 + y_1.i}{x_2 + y_2.i}) = \text{konj } (\frac{x_1 + y_1.i}{x_2 + y_2.i} \text{x } \frac{x_2 - y_2.i}{x_2 - y_2.i})$$

$$= \text{kjt } \{\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + x_2y_1.i - x_1y_2.i}{x_2^2 + y_2^2}\} = \text{kjt } \{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2).i}{x_2^2 + y_2^2}\}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{(x_2y_1 - x_1y_2).i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - x_2y_1.i + x_1y_2.i}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1 - y_1.i)\,(x_2 + y_2.i)}{(x_2 + y_2.i)(x_2 - y_2.i)} = \frac{(x_1 - y_1.i)}{(x_2 - y_2.i)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

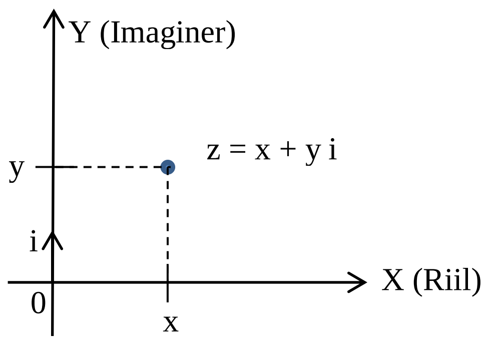
e. $z + \bar{z} = 2x$ f. $z - \bar{z} = 2yi$ g. $z . \bar{z} = x^2 + y^2$

10. $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{x + y.i} = \frac{1}{x + y.i} \times \frac{x-y.i}{x-y.i} = \frac{x-y.i}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} . i$

11. $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy. i$

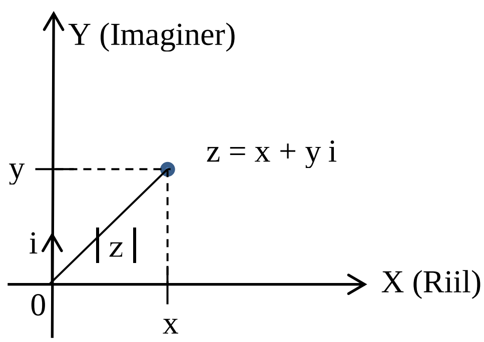
E. GRAFIK BILANGAN KOMPLEKS

Suatu bilangan kompleks dapat digambarkan dalam suatu bidang kompleks seperti menggambarkan suatu titik pada bidang cartesius XY



F. NILAI MUTLAK BILANGAN KOMPLEKS

Nilai mutlak atau absolut atau modulus bilangan kompleks didefinisikan sebagai jarak antara zdan sumbu koordinat dan diberikan sebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Contoh : Diketahui z = -1 – i , maka modulus dari z adalah $|z| = \sqrt{(-1)^2 - (-1)^2} = \sqrt{2}$

Jika z_1, z_2 adalah bilangan kompleks, maka berlaku :

- $|z_1 . z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

- $|z_1 + z_2| \geq |z_1|$ - $|z_2|$

Latihan : 1

1. Selesaikan operasi-operasi aljabar dari bilangan kompleks dibawah ini:
   a. (3 + 4i) + (3i – 2) = 12i – 8i – 12 – 6 = -18 + 4i
   b. 3(-1 + 4i) – 2(7 – i) = (-3 + 12i) – (14 – 2i) = -17 + 14i
   c. (3 + 2i) (2 – i) = 6 +2 +4i – 3i = 8 + i
   d. $\frac{2-3i}{4-i} = \frac{2-3i}{4-i}$ x $\frac{4-i}{4-i} = \frac{8-3-12i-2i}{16-1} = \frac{5-14i}{15}$
   e. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^{10} = -1$
   f. $(2i-1)^2 . \{ \frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} \} = (-4 + 1 - 4i) (\frac{4+4i+2-1-3i}{2}) = (-3-4i)(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} i) =$
2. Tunjukkan bahwa, jika z = -1 – i maka $z^2 + 2z + 2 = 0$
   $(-1-i)^2 + 2(-1-i) + 2 = 0$
   1 - 1+2i – 2 – 2i + 2 = 0 → 0 = 0

3. Tentukan bilangan riil x dan y sehingga
   2x – 3yi + 4xi – 2y – 5 – 10i = (x + y + 2) – (y – x + 3)i
   (2x – 2y – 5) + (4xi – 3yi – 10i) = (x + y + 2) – (y – x + 3)i
   (2x – 2y – 5) + (4x – 3y – 10) i = (x + y + 2) – (y – x + 3)i
   2x – 2y – 5 = x + y + 2 → x - 3y = 7 → 5x – 15 y = 35
   4x – 3y – 10 = y – x + 3 → 5x – 4y = 13 → 5x – 4y = 13
   11y = 22 → y = 2 dan x = 1
4. Jika diberikan : z = 1 + 2i dan w = 3 – 4i, sederhanakan hasil operasi aljabar bilangan kompleks dibawah ini kedalam bentuk a + bi !
   a. 3z + i.w
      3(1 +2i) + i(3 – 4i) = (3 + 6i) (4 + 3i) = 12 – 18 +24i +9i = -6 + 33i
   b. $2z^2 - z\overline{w}$
      $2(1+2i)^2 - (1+2i)(3+4i) = (2+8i-8) - (-5+10i) = -1 -2i$
   c. $\frac{w+z}{w-z} = \frac{1+2i+3-4i}{3-4i-1-2i} = \frac{4-2i}{2-6i} = \frac{8-12-4i-24i}{20} = \frac{1}{4} + \frac{7}{5}$ i

d. $\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{1-i(1+2i)}{1+i(1+2i)} = \frac{1-i+2}{1+i-2} = \frac{3-i}{-1+i} = \frac{-3-1+i-3i}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$

e. $\text{Im}(\bar{z}\, w^2) + 25\, i\, \text{Re}(\frac{z}{w}) = \text{Im}((1-2i)(3-4i)^2) + 25i\, \text{Re}(\frac{1+2i}{3-4i})$

$= \text{Im}((1-2i)(-7-24i)) + 25i\, \text{Re}(\frac{3-8}{25} + \frac{(-4+6)}{25} i)$

$= \text{Im}(-55-10i) + 25i\, \text{Re}(\frac{11}{25} + \frac{2}{25} i)$

$= -10 + 11i$

5. Gambarkan bilangan-bilangan kompleks berikut kedalam diagram kartesius!

a. $z = 3 + 4i$ c. $z = -1 + i$

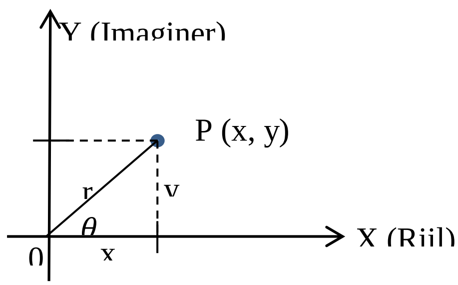
b. $z = 1 - i$ d. $z = 2 - 3i$

6. Jika diberikan $z_1 = 8+6i$ dan $z_2 = 3 - 4i$ tentukan modulus dari:

a. $|z_1 + z_2|$ b. $|z_1 - z_2|$ c. $|z_1 . z_2|$ d. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$

Untuk dicatat dan dipelajari dengan cermat!

G. BENTUK POLAR (KUTUB) BILANGAN KOMPLEKS



Andaikan z = x + yi merupakan suatu titik P (x, y) pada bidang kompleks, berdasarkan gambar diperoleh: $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $= |x + yi|$ dinamakan modulus dari z = x + yi , ditulis mod z dan θdinamakan argumen dari z,ditulis arg z = arc tn $\frac{y}{x}$yaitu menyatakan suatu sudut antara garis OP dengan sumbu Xpositif ($0 \leq \arg z < 2\pi$). Sehinggaz $= x + yi = r \cos \theta + i .r \sin \theta = r (\cos \theta + i.\sin \theta) = r$ cis θ yang dinamakan bentuk kutub bilangan kompleks, dimana r dan θ dinamakan koordinat kutub.

Misal $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ dan $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, maka berlaku :$z_1 + z_2$,$z_1 - z_2$, $z_1 . z_2$ dan $\frac{z_1}{z_2} \in$ bilangan komplek bentuk polar

Catatan : * Cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b * Sin (a + b) = sin a cos b + cos a sin b

*Cos (a - b) = cos a cos b + sin a sin b   * Sin (a - b) = sin a cos b - cos a sin b

Diskusikan dan kerjakan secara berkelompok!

1. Tentukan bentuk polar dari bilangan kompleks dibawah dan gambarkan grafiknya!

   a. $2 + 2\sqrt{3\,i}$ → r = 4, Θ = arc tg $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ = 60^o → bentuk kutub : 4 (cos 60^o + i.sin 60^o)

   b. -5 + 5i → r = $5\sqrt{2}$, Θ = arc tg ($\frac{5}{-5}$) = 135^o → btk kutub : $5\sqrt{2}$ (cos 135^o + i.sin 135^o)

2. Buktikan bahwa:

   a. $z_1 + z_2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)\, i$

   b. $z_1 - z_2 = (r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos \theta_2) + (r_1 \sin \theta_1 - r_2 \sin \theta_2)\, i$

   c. $z_1 . z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\, r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

   $= r_1.r_2 \{(cos\ \theta_1 . cos\ \theta_2 - \sin \theta_1 . \sin \theta_2) + i. (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\}$

   $= r_1.\ r_2 \{\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)\}$

   d. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\text{r1} (\cos \theta_1 + \text{i} \sin \theta_1)}{\text{r2} (\cos \theta_2 + \text{i} \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} . \frac{(\cos \theta_1 + \text{i} \sin \theta_1)}{(\cos \theta_2 + \text{i} \sin \theta_2)} . \frac{(\cos \theta_2 - \text{i} \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - \text{i} \sin \theta_2)}$

   $= \frac{r_1}{r_2} . \frac{cos\ \theta_1 . cos\ \theta_2 + \sin \theta_1 . \sin \theta_2 + \text{i}.(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{cos^2 \theta_2 + sin^2 \theta_2}$

   $= \frac{r_1}{r_2}\ . \{\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)\}$

3. Diketahui $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ Tentukan:

   a. Mod ($z_1.z_2$) = Mod {(1 + i)($\sqrt{3}$ + i)} = Mod {($\sqrt{3}$ - 1) + ($\sqrt{3}$ + 1)i}

   $= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{\left(3 + 1 - 2\sqrt{3}\right) + (3 + 1 + 2\sqrt{3})}$

   $= 2\sqrt{2}$

   Arg ($z_1.z_2$) = arc tg. ($\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$) = arc tg. ($\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ x $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$) = arc tg. ($\frac{3 + 1 + 2\sqrt{3}}{2}$)

   = arc tg (2 + $\sqrt{3}$) = arc tg (3,7321) = 75 ^{o}

   Arg ($z_1.z_2$) = arc tg. ($\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$) = arc tg($\frac{2,7321}{0,7321}$) = arc tg 3,732 = 75 ^{o}

   Arg ($z_1.z_2$) = Arg z_1 + Arg z_2 = arc tg $\frac{1}{2}$ + arc tg $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = 45^o + 30^o = 75 ^{o}

   b. Mod ($\frac{z_1}{z_2}$) = Mod ($\frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}$) = Mod ($\frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}$) = Mod ($\frac{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)\, i}{4}$) = Mod {$\frac{(\sqrt{3} + 1)}{4}$ + $\frac{(\sqrt{3} - 1)}{4}$ i}

   = Mod (0,683 + 0,183 i) = $\sqrt{0,683^2 + 0,183^2}$ = $\sqrt{0,5000}$ = 0,707

Arg $(\frac{z_1}{z_2})$ = arc tg $(\frac{0,183}{0,683})$ = arc tg 0,268 = 15 ^{o}

Arg $(\frac{z_1}{z_2})$ = Arg z_1 - Arg z_2 = arc tg $\frac{1}{2}$ - arc tg $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 45^o - 30^o= 15^o

Pangkat dan Akar dari Bilangan Kompleks

Perkalian dan Pemangkatan

Telah kita ketahui bahwa bilangan kompleks dalam bentuk kutub adalah $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$.

Jika $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ & $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, maka kita peroleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut :

$$z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Dari hasil perkalian tersebut diperoleh:$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Misal dari hasil perkalian $z_1 z_2$ tersebut, $r_1 r_2 = r_t$ dan$\theta_1 + \theta_2 = \theta_t$,

maka untuk $z_3 = r_3 r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ diperoleh

$z_1 z_2 z_3 = (z_1 z_2) z_3 = r_t r_3[\cos(\theta_t + \theta_3) + i \sin(\theta_t + \theta_3)]$

$= r_1 r_2 r_3[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$

Jika $z_1 = z_2 = z_3 = z$ maka

$z_1 z_2 z_3 = z.z.z = r.r.r [\cos(\theta + \theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta + \theta)] = r^2[\cos 3\theta + i \sin 3\theta]$

Pertanyaan :

Bagaimanakah jika kita perkalikan $z_1 z_2 \ldots z_n$ dan $z\,z\,z\,z \cdots z = z^n$?

Jika diketahui:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, ….. , $z_n = r_n(\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$, untuk n asli,

maka, diperoleh $z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$.

Akibatnya jika, $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

maka $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$. untukn asli $\rightarrow$ disebut “**Dalil De-Moivre”**

CONTOH :

Hitunglah :$(\sqrt{3} - i)^{-6}$

Jawab :

Misalkan ($\sqrt{3}$ - i) =z , maka ($\sqrt{3}$ - i)$^{-6}$=$\frac{1}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6}$ = $\frac{1}{\mathrm{z}^6}$

r = $|z|$= $\sqrt{3+1}$= 2 dan θ = arc tg $\frac{-1}{\sqrt{3}}$(kuadran 4)

karena z di kuadran IV, makaθ = arc tg $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ = 330 ^{o}

z^6= ($\sqrt{3}$ - i)^6 = 2^6 (cos (6 x 330 ^{o}) + i sin (6 x 330 ^{o})) = 2^6 (cos 180 ^{o} + i sin 180 ^{o})

= 2^6 (-1 + 0)

= -2^6

($\sqrt{3}$ - i)$^{-6}$ = $\frac{1}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6}$ = $\frac{1}{\mathrm{z}^6}$ =$\frac{1}{-2^6}$

Contoh:

Akar Bilangan Kompleks

Andaikan w = ρ(cosϕ +i sinϕ)adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks z = r (cos θ + i sin θ), maka:

$$w^n = z$$

$$\rho(\cos\phi + i \sin\phi)^n = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Dengan menggunakan teorema **De'Moivre,** diperoleh:

$$\rho(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \rho^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Sehingga :

ρ^n(cosnϕ +i sinnϕ) = r (cos θ + i sin θ) dan ρ^n = r , nϕ= θ+2kπ ,

n adalah bilangan asli 1, 2, 3 …… dan kadalah bilangan bulat 0, 1, 2, ……. (n-1)

Akibatnya :

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \qquad \text{dan}\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$$

Jadi akar pangkat n dari bilangan kompleks z = r (cos θ + i sin θ)adalah :

w = ρ(cosϕ +i sinϕ) = $r^{\frac{1}{n}}$(cos $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ + i sin $\frac{\theta+2k\pi}{n}$)

dimana k = 0,1,2,3,⋯,(n-1);berturut-turut untuk n = 1, 2, 3, ……n

Dari persamaan $w^n = z$, maka ada n buah akar berbeda yang memenuhi persamaan itu, dan n akan membagi sudut 360^o mennjadi n bagian sama besar.

Dimana, $0 \leq \frac{\theta+2k\pi}{n} < 2\pi$, sehingga diperoleh $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ sebagai akar ke-n dari z.

CONTOH :

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sqrt{-25}$

   Jawab :

   misal $\sqrt{-25}$ = w = ρ(cosϕ +i sinϕ) dan -25 = z dapat ditulis z = 25 (cos 180^o+ i sin180^o)

   Maka $w = \sqrt{z}$ atau $w^2 = z$

   $\rho^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) = 25(\cos 180^o + i \sin 180^o)$

   Sehingga ρ = 5 dan $\phi = \frac{180 + 2k\pi}{2}$

   Jadi $w = \rho(\cos\phi + i \sin\phi) = 5(\cos\frac{180 + 2k\pi}{2} + i \sin\frac{180 + 2k\pi}{2})$

   Untuk k = 0 → $w = 5(\cos\frac{180}{2} + i \sin\frac{180}{2}) = 5(0 + i) = 5i$

   Untuk k = 1 → $w = 5(\cos\frac{3.180}{2} + i \sin\frac{3.180}{2}) = 5(0 - i) = -5i$

   Hp = {5i, -5i}

2. Hitunglah $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}\, i}$!

   Misal $8 + 8\sqrt{3}$ i = z dan $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}\, i}$ = w = ρ(cosϕ +i sinϕ), maka $\sqrt[4]{z}$ = w = ρ(cosϕ +i sinϕ)

   Untuk $z = 8 + 8\sqrt{3}i$ diperoleh $r = \sqrt{64 + 192} = 16$ dan θ = arc tg $\sqrt{3} = 60^o$

   Jadi: $z = 16(\cos 60^o + i \sin 60^o)$

   Dari $\sqrt[4]{z}$ = w dapat ditulis $w^4 = z$ Dengan menggunakan dalil De-Moivre diperoleh

   $\rho^4(\cos 4\phi + i \sin 4\phi) = 16(\cos 60^o + i \sin 60^o)$ sehingga $\rho^4 = 16 \rightarrow \rho = 2$ dan $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{4}$

   Untuk k = 0 → $w_1 = 2(\cos 15^o + i \sin 15^o) = 2(0{,}966 + 0{,}259.i) = 1{,}932 + 0{,}518\, i$

   Untuk k = 1 → $w_2 = 2(\cos 105^o + i \sin 105^o) = 2(-0{,}259 + 0{,}966.i) = -0{,}518 + 1{,}932\, i$

   Untuk k = 2 → $w_3 = 2(\cos 195^o + i \sin 195^o) = 2(-0{,}259 - 0{,}966.i) = -0{,}518 - 1{,}932\, i$

   Untuk k = 3 → $w_4 = 2(\cos 345^o + i \sin 345^o) = 2(0{,}966 - 0{,}259.i) = 1{,}932 - 0{,}518\, i$

   Jadi akar-akar dari $\sqrt[4]{8 + 8\sqrt{3}\, i}$ adalah $w_1 = 1{,}932 + 0{,}518\, i$; $w_2 = -0{,}518 + 1{,}932\, i$; $w_3 = -0{,}518 - 1{,}932\, i$ dan $w_4 = -0{,}518 + 1{,}932\, i$

3. Hitunglah $\sqrt[3]{27\,i}$

BAB 2
FUNGSI KOMPLEKS

A. Lingkungan Bilangan Kompleks

Sebelum membahas fungsi kompleks ,berikut ini diberikan beberapakonsep dan istilah yang akan banyak digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Misalkan z_0 adalah suatu titik pada bidang datar dan r adalah bilangan real positif, maka:

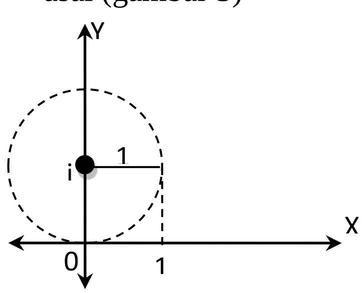
- Lingkaran-r bagi z_0 (ditulis :N (z_0 , r)),didefinisikan sebagai seluruh titik-titik z pada bidang datar sedemikian sehingga $|z - z_0|$< r. N (z_0 , r) merupakan cakram yang berpusat z_0 berjari-jari r tetapi tidak termasuk kelilingnya.

  Contoh : N(i , 1) adalah cakram yang berpusat pada i dengan jari-jari 1 tetapi tidak termasuk kelilingnya (gambar 1).

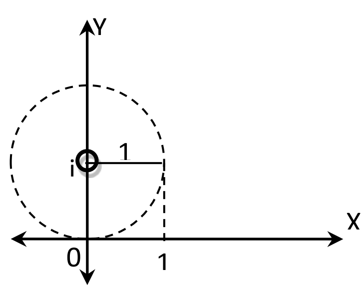
- Lingkaran-r terhapus bagi z_0 (ditulis : N* (z_0 , r)), didefinisikan sebagai seluruh titik-titik z pada bidang datar sedemikian sehingga 0 <$|z - z_0|$< r. N^* (z_0 , r) merupakan cakram yang berpusat z_0 berjari-jari r tetapi tidak termasuk titik pusat dan kelilingnya.

  Contoh : N^* (i , 1) adalah cakram yang berpusat pada i dengan jari-jari 1 tetapi tidak termasuk titik pusat dan kelilingnya (gambar 2).

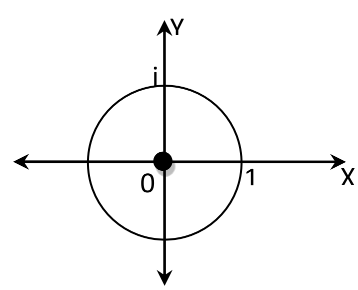
- Lingkaran satuan (ditulis : $|z| = 1$)adalah lingkaran berjari-jari satu dan berpusat di titik asal (gambar 3)



Gambar : 1
N(i , 1)



Gambar : 2
N^*(i , 1)



Gambar : 3
$|z| = 1$

B. Fungsi Kompleks dengan Domain Bilangan Kompleks

Misalkan S ⊂C, fungsi f pada S adalah suatu relasi yang memetakan setiap z ∈ S dengan tepat satu unsur w ∈ C (dapat ditulis dengan w = f(z)).

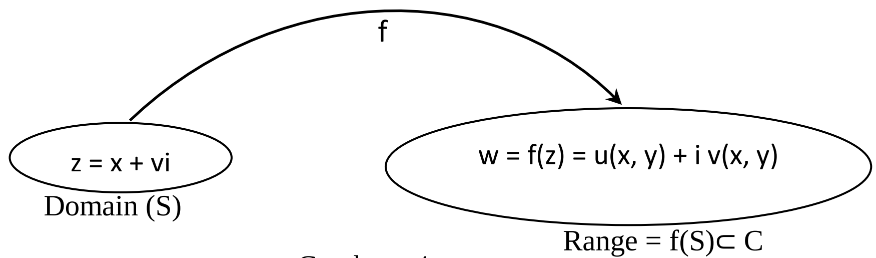
Dalam hal ini:

- S = domain dari f (Df).
- z = variabel kompleks.
- w = nilai fungsi f pada z.
- himpunan yang anggotanya seluruh nilai fungsi f pada z disebut sebagai range dari f (Rf).

Misalkan w = u + vi, dari w = f(z) dapat diperoleh u + vi = f(x + yi) maka masing-masing bilangan riil *u* dan *v* bergantung pada variabel riil *x* dan *y*, sehingga w = *f(z)* dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil *x* dan *y*, yaitu:

$$f(z) = w = u(x,y) + v(x,y)\, i.$$

Selanjutnya rumusan di atas dapat diilustrasikan pada gambar 4:



Gambar : 4
$f : S \to C$

Dari z = x + yi dan w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y), berarti Re(w) dan Im(w) masing-masing merupakan nilai fungsi dengan dua variabel real x dany.

Apabila $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, sehingga $w = f(z) = f(r\cos\theta + i\, r \sin\theta)$, maka u dan v bergantung pada variabel riil r dan θ, sehingga w = *f(z)* dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil *r*dan θ, yaitu:

$$f(z) = w = u(r,\theta) + v(r,\theta)\, i$$

Contoh :

1. Tentukan nilai u dan v dari$f(z) = 2z^2 - i$!

   Penyelesaian : Misal z = x + yi, maka
   $$\begin{aligned} w = f(z) = f(x + yi) &= 2(x + yi)^2 - i \\ &= 2(x^2 + 2xyi - y^2) - i \\ &= 2x^2 - 2y^2 + 4xyi - i \\ &= 2(x^2 - y^2) + (4xy - 1)i \end{aligned}$$

   Jadi $u = 2(x^2 - y^2)$ dan $v = 4xy - 1$

2. Jika $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, tentukan nilai u dan v dari $f(z) = z^2 + i$!

   Penyelesaian : $f(z) = z^2 + i$
   $$\begin{aligned} f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) &= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 + i \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + i\, 2\sin\theta\cos\theta) + i \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r^2 i \sin 2\theta + i \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (r^2 \sin 2\theta + 1)\, i \end{aligned}$$

Jadi $u = r^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2 \cos 2\theta$ dan $v = (r^2 \sin 2\theta + 1)$

<u>Catatan :</u>

- sin 2a = 2sin a cos a
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

3. Misalkan $w = f(z) = z^2 + 3z$.
   a. Tentukan u dan v dalam x dan y!
   b. Hitung nilai dari f pada z = 1 + 3i!
   c. Nyatakan u dan v secara umum dalam bentuk polar !

   Penyelesaian :

   a) Misal $z = x + yi \rightarrow w = (x + yi)^2 + 3(x + yi)$
   $= x^2 - y^2 + 2xyi + 3x + 3yi$
   $= (x^2 + 3x - y^2) + (2xy + 3y)\, i$

   Jadi $u = x^2 + 3x - y^2$ dan $v = 2xy + 3y$

   b) $f(z) = w = (x^2 + 3x - y^2) + (2xy + 3y)\, i$
   $f(1 + 3i) = (1 + 3 - 9) + (2.1.3 + 3.3)\, I = -5 + 15i$

   c) Misal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
   $f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 + 3r(\cos\theta + i\sin\theta)$
   $= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + i\, 2\sin\theta\cos\theta) + 3r\cos\theta + i\, 3\sin\theta$
   $= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 3r\cos\theta + i\, r^2\sin 2\theta + i\, 3r\sin\theta$
   $= (r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta) + (r^2\sin 2\theta + 3r\sin\theta)\, i$

   Jadi $u = r^2\cos 2\theta + 3r\cos\theta$ dan $v = r^2\sin 2\theta + 3r\sin\theta$

4. Jika $f(z) = 2x^2 + yi$, Tentukan f(z) dalam bentuk z!
   Penyelesaian:
   Jika $z = x + yi$ maka $\bar{z} = x - yi$
   Akibatnya : $z + \bar{z} = 2x$ sehingga $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $z - \bar{z} = 2yi$ sehingga $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
   Dari $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ diperoleh $f(z) = 2(\frac{z+\bar{z}}{2})^2 + (\frac{z-\bar{z}}{2i})\, i$
   $= 2(\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{4}) + \frac{z-\bar{z}}{2}$
   $= \frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}}{2} + \frac{z-\bar{z}}{2}$

$= \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + z - \bar{z})$

$= \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z}) + z\bar{z}$

5. Diketahui f(z) = x + yi + $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$
   a. Nyatakan f(z) dalam bentuk z
   b. Tentukan nilai u dan v
   c. Tentukan nilan f(1 + 2i)

   Penyelesaian :

   a) Misal z = x + yi maka x = $\frac{z+\bar{z}}{2}$ dan y = $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ sehingga

   f(z) = x + yi + $\frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{z+\bar{z}}{2} + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + \frac{\frac{z+\bar{z}}{2} - i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)}{z+\bar{z}} = z + \frac{1}{z}$

   b) f(z) = w = x + yi + $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ = x + $\frac{x}{x^2+y^2}$ - $\frac{yi}{x^2+y^2}$ + yi = (x + $\frac{x}{x^2+y^2}$) – ($\frac{y}{x^2+y^2}$ - y) i

   Jadi u = x + $\frac{x}{x^2+y^2}$dan v = $\frac{y}{x^2+y^2}$ - y

   c) f(z) = z + $\frac{1}{z}$ → f(1 + 2i) = 1 + 2i + $\frac{1}{1+2i}$ = 1 + 2i + $\frac{1-2i}{5}$ = $\frac{5+10i+1-2}{5}$ = $\frac{6}{5} + \frac{8}{5}$ i

6. Jika w = f(z) = $\frac{z+2}{2z-1}$, Tentukan :
   a. f(0) , f(i) , f(1 + i)
   b. Nilai z, sehingga f(z) = i
   c. Nilai z, sehingga f(z) = 2 – 3i

   Penyelesaian:

   a. f(0) = $\frac{0+2}{2.0-1} = \frac{2}{-1}$ = -2

   f(i) = $\frac{i+2}{2i-1} = \frac{i+2}{-(1-2i)} \times \frac{-(1+2i)}{-(1+2i)} = \frac{-(i+4i+2-2)}{1+2} = \frac{-5i}{3} = \frac{5}{3}$ i

   f(1+i) = $\frac{1+i+2}{2+2i-1} = \frac{3+i}{1+21} x \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3+2-6i+i}{1+2} = \frac{5-6i}{3} = \frac{5}{3}$ – 2i

   b. Misal z = x + yi maka f(z) = $\frac{x+yi+2}{2x+2yi-1}$ = i → $x + yi + 2$ = 2xi – 2y –i

   → (2+x) + yi = -2y + (2x -1)i

   → 2y + x = -2

   y - 2x = -1

   5x = 0 → x = 0, y = -1 Jadi z = -i

   c. Misal z = x + yi maka f(z) = $\frac{x+yi+2}{2x+2yi-1}$ = 2 -3i → $x + yi + 2$ = 4x-6i+4yi+6y-2+3i

   → (2+x) + yi = (4x+6y-2) + (4y-3) i

→ 2 + x = 4x + 6y – 2 dan y = 4y – 3
→ 3x + 6y = 4
3y = 3
3x = -2 → x = - $\frac{2}{3}$y = 1 Jadi z = - $\frac{2}{3}$ + i

BAB III

LIMIT FUNGSI

C. Pengertian Limit Fungsi

- Limit fungsi menggambarkan seberapa jauh nilai sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi tersebut terus menerus berkembang mendekati suatu titik tertentu.
- Jika f(x) mendekati L ketika variabel x mendekati a (a dan L adalah suatu konstanta), maka L disebut limit dari nilai fungsi f pada x untuk x mendekati a
- Limit merupakan salah satu pengetahuan dasar untuk memahami integral dan diferensial. Limit dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut.

D. Pengertian Limit Fungsi Kompleks

Jika diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada daerah S ⊂ C dan z_0∈ S' ⊂ ℂ, maka:

a. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$Jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika 0 <|z - z_0|<δ berlaku| f(z) – L| <ε

b. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$Jika dan hanya jika untuk setiap Lingkungan N(L, ε) terdapat Lingkungan terhapus $N^*(z_0, \delta)$ sehingga jika z ∈ {$N^*(z_0, \delta)$∩ S} berlaku f(z) ∈ N(L, ε)

Contoh 1: Hitunglah $\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i}$

Jawab :$\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i}$ = $\lim_{z\to i} \frac{(z+i)(z-i)}{z-i}$ $\lim_{z\to i}(z+i)$ = 2i

Contoh 2: Buktikan bahwa: $\lim_{z\to 2} \frac{2z^2-3z-2}{z-2}$ = 5

Penyelesaian : Bukti

Misal ditentukan ε> 0, akan dicari δ> 0 sedemikian sehingga:

jika 0 <|z - 2|<δ berlaku|$\frac{2z^2-3z-2}{z-2}$ – 5| <ε, untuk z ≠ 2

Dari persamaan kanan diperoleh: |$\frac{2z^2-3z-2}{z-2}$ – 5|<ε ↔ |$\frac{(2z+1)(z-2)}{z-2}$ – 5|<ε

$\leftrightarrow |2z + 1 - 5| < \varepsilon$

$\leftrightarrow |2(z - 2)| < \varepsilon$

$\leftrightarrow |z - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Dari hal tersebut di atas menunjukkan bahwa δ telah diperoleh yaitu $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ sehingga $z \neq 2$

Jika $0 < |z - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ berlaku $\left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2} - 5\right| < \varepsilon$

Terbukti bahwa $\lim_{z\to 2} \frac{2z^2-3z-2}{z-2} = 5$

Contoh 3: Diketahui $\lim_{z\to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$, $\varepsilon = 0{,}1$ Tentukan δ

Penyelesaian: akan dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z - 1| < \delta$ maka $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon$

Dari bagian kanan diperoleh $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{i(z-1)}{2}\right| < \varepsilon$

$\leftrightarrow \frac{|i||z-1|}{2} < \varepsilon$

$\leftrightarrow |z - 1| < 2\,\varepsilon$

Berarti $\delta = 2\,\varepsilon = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$

Contoh 4: Misalkan $f(z) = \frac{iz}{2}$, $|z| < 1$, buktikan $\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{i}{2}$

Penyelesaian:

Misal ditentukan $\varepsilon > 0$, akan dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga:

jika $0 < |z - 1| < \delta$ berlaku $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon$,

Dari persamaan kanan diperoleh: $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{i(z-1)}{2}\right| < \varepsilon$

$\leftrightarrow \frac{|i||z-1|}{2} < \varepsilon$

$\leftrightarrow |z - 1| < 2\,\varepsilon$

Dari hal tersebut di atas menunjukkan bahwa δ telah diperoleh yaitu $\delta = 2\varepsilon$

Jadi jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = 2\,\varepsilon > 0$ sehingga

Jika $0 < |z - 1| < \delta = 2\,\varepsilon$ berlaku $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon$

Terbukti bahwa $\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{i}{2}$

Contoh 5: Jika $f(z) = 3z^2 + 2z$, Tentukan $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Penyelesaian:

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{3z^2+2z-3z_0-2z_0}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{3(z-z_0)(z+z_0)+2(z-z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to 1} 3(z+z_0)+2$

$\lim_{z \to 1} 3(z+z_0)+2 = 3(z_0+z_0)+2 = 6z_0+2$

Contoh 6: Misalkan $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, buktikan $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada.

E. Teorema Limit Fungsi Kompleks:

1. Diberikan fungsi kompleks f dan g yang terdefinisi pada daerah $S \subset C$ dengan $z_0 \in S'$

   Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ dan $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$, maka

   a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$

   b) $\lim_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = L - M$

   c) $\lim_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = L.M$

   d) $\lim_{z \to z_0} (\frac{f(z)}{g(z)}) = \frac{L}{M}$

   e) $\lim_{z \to z_0} k.f(z) = k.L$, $k \in C$

   f) $\lim_{z \to z_0} k = k$, *k : konstanta*

2. Diberikan $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ terdefinisi pada daerah $S \subset C$ dengan $z_0 = (x + yi) \in S'$

   Maka: $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + Bi$ jika dan hanya jika $\lim_{(x,y) \to (a,b)} u(x,y) = A$ dan $\lim_{(x,y) \to (a,b)} v(x,y) = B$

   atau

   Misalkan z = x+yi dan f(z) = u + vi dengan domain $S \subset C$. Titik $z_0 = (x_0 + y_0 i) \in S' \subset C$ Maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = x_0 + y_0 i$ Jika dan hanya jika $\lim_{z \to z_0} u(x,y) = x_0$ dan $\lim_{z \to z_0} v(x,y) = y_0$.

Contoh 7: Hitung $\lim_{z \to (1+i)} (z^2 - 5z + 10)$

Penyelesaian : dengan menggunakan teorema limit diperoleh :

$$\lim_{z \to (1+i)} (z^2 - 5z + 10) = \lim_{x \to (x+i)} z^2 - \lim_{x \to (x+i)} 5z + \lim_{x \to (x+i)} 10$$

$$= (1+i)^2 - 5(1+i) + 10$$

$$= 1+2i - 1 - 5 - 5i + 10$$

$$= 5 - 3i$$

F. FUNGSI KONTINU

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada z_0 jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Definisi tersebut mensyaratkan tiga hal, antara lain:

1) jika $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada

2) f (z_0) ada

3) jika $\lim_{z \to z_0} f(z)$ = f (z_0)

G. TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

Jika diberikan fungsi f terdefinisi pada daerah S ⊂ C dan $z_0 \in$ S.makaturunan fungsi f pada z_0 dapat didefinisikan dengan:

$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, berlaku jika limit tersebut ada.

- Jika f(z) = k, untuk setiap z ⊂ C dengan k adalah suatu konstanta, maka f '(z) = 0
- Jika f(z) = z, untuk setiap z ⊂ C , maka f '(z) = 0
- Jika f(z) = z^n untuk setiap z ⊂ C , maka f '(z) = $n.z^{n-1}$

Contoh1:

Buktikan f(z) = z^2 terdifferensiasi diseluruh ℂ

Bukti :

Ditinjau sebarang titik $z_o \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z \to z_o} \\ &= \lim_{z \to z_o} \frac{z^2 - z_o^2}{z - z_o} \\ &= \lim_{z \to z_o} \frac{(z+z_o)(z-z_o)}{z - z_o} \\ &= 2z_o \end{aligned}$$

Karena z_o sebarang maka f(z) = z^2 terdefferensialdi seluruh ℂ