BUKU DIKTAT

ANALISA VARIABEL KOMPLEKS

OLEH :

DWI IVAYANA SARI, M.Pd

DAFTAR ISI

1 BILANGAN KOMPLEKS

Dengan memiliki sistem bilangan real $\mathbb{R}$ saja kita tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2 + 1 = 0$. Jadi disamping bilangan real kita perlu bilangan jenis baru. Bilangan jenis baru ini dinamakan bilangan *imajiner* atau bilangan *kompleks*.

I. BILANGAN KOMPLEKS DAN OPERASINYA

Definisi 1.1

Bilangan kompleks adalah bilangan yang berbentuk:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ atau $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$, a dan b bilangan real dan $i^2 = -1$.

Notasi

Bilangan kompleks dinyatakan dengan huruf z, sedang huruf x dan y menyatakan bilangan real. Jika $z = x + iy$ menyatakan sembarang bilangan kompleks, maka x dinamakan bagian real dan y bagian imajiner dari z. Bagian real dan bagian imaginer dari bilangan kompleks z biasanya dinyatakan dengan $\text{Re}(z)$ dan $\text{Im}(z)$.

II. OPERASI HITUNG PADA BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 2.1

Bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan bilangan kompleks $z_2 = x_2 + iy_2$ dikatakan sama, $z_1 = z_2$, jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Definisi 2.2

Untuk bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ jumlah dan hasil kali mereka berturut-turut didefinisikan sbb:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Himpunan semua bilangan kompleks diberi notasi $\mathbb{C}$

Jadi $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

Jika $\mathrm{Im}(z) = 0$ maka bilangan kompleks z menjadi bilangan real x, sehingga bilangan real adalah keadaan khusus dari bilangan kompleks, sehingga $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Jika $\mathrm{Re}(z) = 0$ dan $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, maka z menjadi iy dan dinamakan bilangan *imajiner murni*. Bilangan imajiner murni dengan $y = 0$, yakni bilangan i, dinamakan *satuan imajiner*.

Sifat-sifat lapangan bilangan kompleks

Himpunan semua bilangan kompleks bersama operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ membentuk sebuah lapangan (*field*). Adapun sifat-sifat lapangan yang berlaku pada bilangan kompleks z_1,z_2 dan z_3 adalah sebagai berikut:

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ dan $z_1 \bullet z_2 \in \mathbb{C}$ (sifat tertutup)
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1$ (sifat komutatif)
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ dan $(z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 = z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3)$ (sifat assosiatif)
4. $z_1 \bullet (z_2 + z_3) = z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3$ (sifat distribtif)
5. Ada $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$, sehingga $z + 0 = z$ (0 elemen netral penjumlahan)
6. Ada $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$, sehingga $z \bullet 1 = z$ (1elemen netral perkalian)
7. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ada $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$, sehingga $z + (-z) = 0$
8. Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ada $z^{-1} = \frac{1}{z}$ sehingga $z \bullet z^{-1} = 1$.

dengan,
$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{x + yi} \\ &= \frac{1}{x + yi} . \frac{x - yi}{x - yi} \\ &= \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\ z^{-1} &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \end{aligned}$$

Tugas: Buktikan sifat-sifat 1 – 8 menggunakan definsi yang telah diberikan.

Contoh 2.1

1. Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, buktikan bahwa: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
2. Diketahui: $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - i$. Tentukan $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, dan $\frac{z_1}{z_2}$

III. KOMPLEKS SEKAWAN

Jika $z = x + iy$ bilangan kompleks, maka bilangan kompleks sekawan dari z ditulis $\bar{z}$, didefinisikan sebagai $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$.

Contoh 3.1

Sekawan dari $3 + 2i$ adalah $3 - 2i$, dan sekawan dari $5i$ adalah $-5i$.

Operasi aljabar bilangan kompleks sekawan di dalam himpunan bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut :

Teorema 3.1

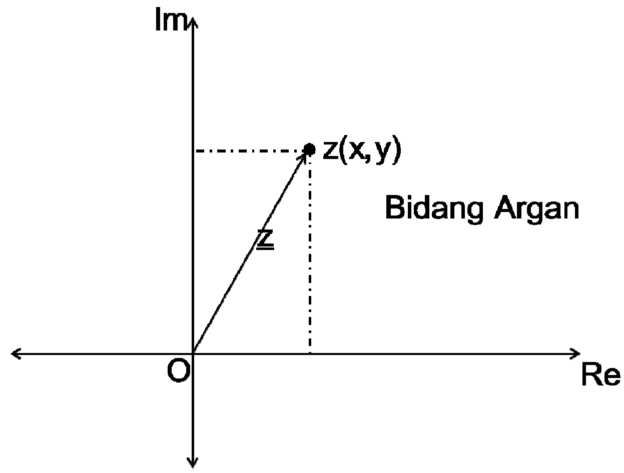
a. Jika z bilangan kompleks, maka :
   1. $\bar{\bar{z}} = z$
   2. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
   3. $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
   4. $z \bullet \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

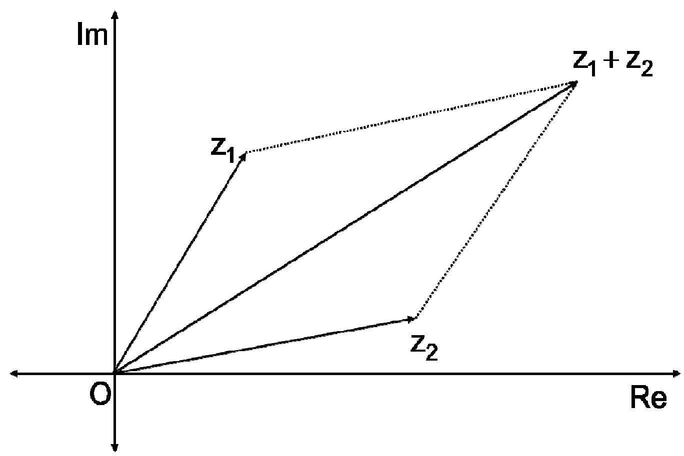
b. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka:
   1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
   3. $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$
   4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, dengan $z_2 \neq 0$

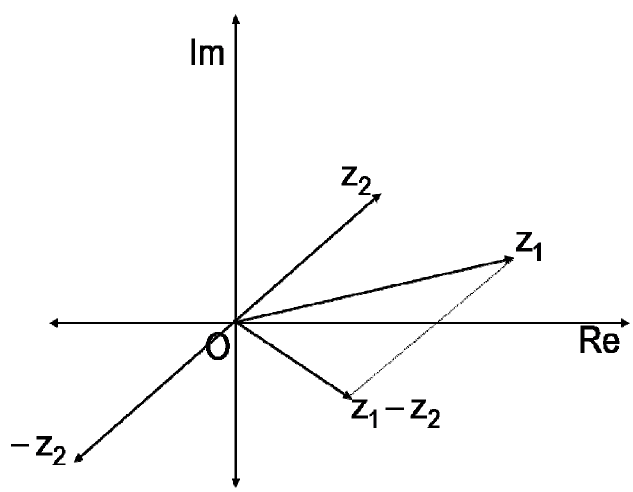
IV. INTERPRETASI GEOMETRIS BILANGAN KOMPLEKS

Karena $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai $z = (x, y)$, merupakan pasangan terurut bilangan real, maka z dapat digambarkan secara geometri dalam koordinat Kartesius sebagai sebuah titik (x, y). Pemberian nama untuk sumbu x diubah menjadi sumbu Real dan sumbu y diubah menjadi sumbu Imajiner. Bidang kompleks tersebut di beri nama bidang Argand atau bidang$-z$. Jika kita hubungkan titik asal $(0,0)$

dengan titik (x, y), maka terbentuk vektor; sehingga bilangan kompleks $z = x + iy = (x, y)$ dapat dipandang sebagai vektor z. Arti geometris dari penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks dapat dilihat pada gambar berikut.







Tugas :

Diketahui $z1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - i$. Gambarkan pada bidang kompleks (bidang argand) z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\overline{z_1}, \overline{z_2}$, $\overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1} - \overline{z_2}$

V. MODULUS (NILAI MUTLAK) DARI BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 5.1

Jika $z = x + iy = (x, y)$ bilangan kompleks, maka modulus dari z, ditulis $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Arti geometri dari modulus z adalah merupakan jarak dari titik $O(0,0)$ ke $z = (x, y)$. Akibatnya, jarak antara dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Selanjutnya apabila $z_1 = x_1 + iy_1$ dan r real positif, maka $|z - z_1| = r$ merupakan lingkaran yang berpusat di titik z_1 dengan jari-jari r.

Bagaimanakah dengan $|z - z_1| < r$ dan $|z - z_1| > r$, Gambarkanlah pada bidang z.

Teorema 5.1

a. Jika z bilangan kompleks, maka berlaku :
   1. $|z|^2 = \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$
   2. $|z| = |\bar{z}|$
   3. $|z|^2 = z \bullet \bar{z}$
   4. $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$
   5. $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

b. Jika z_1, z_2 bilangan kompleks, maka berlaku :
   1. $|z_1 \bullet z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$
   2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
   3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   4. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
   5. $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

Tugas : Buktikanlah teorema a di atas dengan memisalkan $z = x + iy$, kemudian berdasarkan hasil a, buktikan juga teorema b !

1. Akan dibuktikan $|z_1 \bullet z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$

$$
\begin{aligned}
|z_1 \bullet z_2| &= |(x_1 + iy_1) \bullet (x_2 + iy_2)| \\
&= |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)| \\
&= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1{}^2x_2{}^2 + y_1{}^2y_2{}^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1{}^2y_2{}^2 + x_2{}^2y_1{}^2 - 2x_1x_2y_1y_2} \\
&= \sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2) \bullet (x_2{}^2 + y_2{}^2)} \\
&= \sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)} \bullet \sqrt{(x_2{}^2 + y_2{}^2)} \\
&= |z_1| \bullet |z_2|
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti $|z_1 \bullet z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$

2. Akan dibuktikan $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} . \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right| \\
&= \left|\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x_1{}^2x_2{}^2 + y_1{}^2y_2{}^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2{}^2y_1{}^2 + x_1{}^2y_2{}^2 - 2x_1x_2y_1y_2}{(x_2{}^2 + y_2{}^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2).(x_2{}^2 + y_2{}^2)}{(x_2{}^2 + y_2{}^2).(x_2{}^2 + y_2{}^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}}{\sqrt{(x_2{}^2 + y_2{}^2)}} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3. Akan dibuktikan $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$0 \leq (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$

$0 \leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2$

$2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$

$x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$

$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$

$2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leq 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$

$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2$

$\leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$

$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2$

$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Jadi, terbukti $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4. Akan dibuktikan $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$

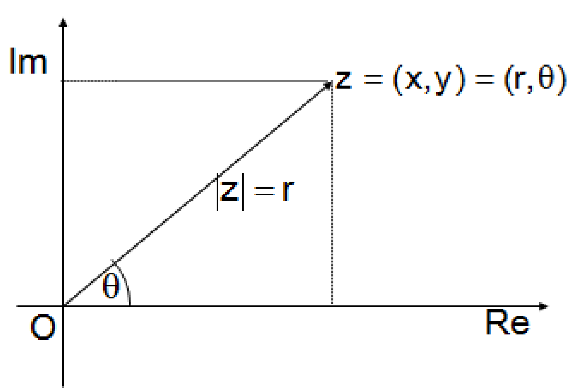
$\leq |z_1 - z_2| + |z_2|$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

Jadi, terbukti $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

VI. BENTUK KUTUB (POLAR) DAN EKSPONEN DARI BILANGAN KOMPLEKS

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x + iy = (x, y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk koordinat kutub atau Polar, yaitu $z = (r, \theta)$.



Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah:

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

sehingga $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

θ adalah sudut antara sumbu$-x$ positif dengan oz

didapat juga $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

Jadi, bentuk kutub bilangan kompleks z adalah

$z = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \text{ cis } \theta$

dan sekawan dari $\bar{z} = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Definisi 6.1

Pada bilangan kompleks $z = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, sudut θ disebut argument dari z, ditulis arg z. Sudut θ dengan $0 \leq \theta < 2\pi$ atau $-\pi < \theta \leq \pi$ disebut argument utama dari z, ditulis $\theta = \text{Arg } z$. Pembatasan untuk sudut θ tersebut dipakai salah satu saja.

Definisi 6.2

Dua bilangan kompleks $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ dikatakan sama, jika $r_1 = r_2$, dan $\theta_1 = \theta_2$.

Selain penulisan bilangan kompleks $z = (x, y) = (r, \theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r \text{ cis } \theta$, maka anda dapat menuliskan z dalam rumus Euler (eksponen), yaitu $z = re^{i\theta}$, dan sekawannya adalah $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Tugas: Buktikan bahwa $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, dengan menggunakan deret MacLaurin untuk $\cos\theta$, $\sin\theta$ dan e^t dengan mengganti $t = i\theta$.

Contoh 6.1

Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 + i$ dalam bentuk polar dan eksponen!

Jawab :

$z = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$, $\tan\theta = 1$, sehingga $\theta = 45^0 = \frac{1}{4}\pi$

Jadi $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$

VII. PANGKAT DAN AKAR DARI BILANGAN KOMPLEKS

A. Perkalian dan Pemangkatan

Telah kita ketahui bahwa bilangan kompleks dalam bentuk kutub adalah $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Jika $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka kita peroleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut :

$$z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Dari hasil perkalian tersebut diperoleh:

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Pertanyaan :

Bagaimanakah jika kita perkalikan $z_1 z_2 \dots\dots\dots z_n$ dan $z\,z\,z\,z\ \dots\ z = z^n$?

Jika diketahui:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, untuk n asli

maka secara induksi matematika, diperoleh rumus perkalian

$z_1 z_2 \dots\dots\dots z_n = r_1 r_2 \dots\dots\dots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$

Akibatnya jika, $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Khusus untuk $r = 1$, disebut **Dalil De-Moivre**

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, dengan n asli.

B. Pembagian

Sedangkan pembagian z_1 dan z_2 adalah sebagai berikut:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

Setelah pembilang dan penyebut dikalikan dengan sekawan penyebut, yaitu

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$, maka diperoleh:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Dari rumus di atas diperoleh:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

Akibat lain jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

maka, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)]$

untuk, $\dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{r^n(\cos n\theta + i\ \sin n\theta)}$

setelah pembilang dan penyebut dikalikan sekawan penyebut, maka diperoleh:

$$\boxed{\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\ \sin(-n\theta)]}$$ ………………… (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\boxed{z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)]}$$ **Dalil De-Moivre**

berlaku untuk semua n bilangan bulat.

Contoh 7.1

Hitunglah: $\left(\sqrt{3} - i\right)^{-6}$

Jawab:

$z = \sqrt{3} - i$

$r = |z| = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\tan\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

Karena z di kuadran IV, maka dipilih $\theta = -30^0$

Jadi, $\sqrt{3} - i = 2(\cos(-30^0) + \sin(-30^0))$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3} - i\right)^{-6} &= 2^{-6}(\cos(-180^0) + \sin(-180^0)) \\ &= 2^{-6}(-1 + 0) \\ &= -2^{-6}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(-2)^6}$$

$$= \frac{1}{64}$$

VIII. AKAR BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan kompleks z adalah akar pangkat n dari bilangan kompleks w, jika $z^n = w$, dan ditulis $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Jika $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ akar pangkat n dari bilangan kompleks $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka dari $z^n = w$ diperoleh: $\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, sehingga $\rho^n = r$ dan $n\phi = \theta + 2k\pi$, k bulat.

Akibatnya, $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ dan $\phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

Jadi, akar pangkat n dari bilangan kompleks

$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ adalah:

$$z = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

k bulat dan n bilangan asli.

Dari persamaan $z^n = w$, ada n buah akar berbeda yang memenuhi persamaan itu.

Untuk mempermudah dipilih $k = 0,1,2,3,\ldots,(n-1)$;

$0 \le \frac{\theta+2k\pi}{n} < 2\pi$, sehingga diperoleh $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sebagai akar ke-n dari z.

Contoh 8.1

Hitunglah $(-81)^{\frac{1}{4}}$

Jawab :

Misalkan $z = (-81)^{\frac{1}{4}}$, berarti harus dicari penyelesaian persamaan $z^4 = -81$

Tulis $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ dan $-81 = 81(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$

sehingga $\rho^4(\cos 4\phi + i\sin 4\phi) = 81(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$

diperoleh $\rho^4 = 81$, atau $\rho = 3$ dan .

Jadi $z = 3[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)]$

Keempat akar yang dicari dapat diperoleh dengan mensubstitusi $k = 0,1,2,3$ ke persamaan terakhir.

Latihan Soal Bab I

1. Buktikan Teorema 1 dengan memisalkan $z = (x, y) = x + iy$.
2. Diketahui $z_1 = 6 + 5i$ dan $z_2 = 8 - i$.

   Tentukan $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$
3. Jika $z = -1 - i$, buktikan $z^2 + 2z + 2 = 0$.
4. Cari bilangan kompleks z yang memenuhi sifat:

   a. $z^{-1} = z$

   b. $\bar{z} = -z$
5. Buktikan untuk setiap z bilangan kompleks berlaku: $z_1.\overline{z_2} = \overline{z_1}.z_2 = 2\text{Re}(z_1\overline{z_2})$
6. Hitung jarak antara $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - i$.
7. Gambarkan pada diagram argand dan sebutkan nama kurva yang terjad :

   a. $|z - 5| = 6$ dan $|z - 5| > 6$

   b. $|z + i| = |z - i|$

   c. $1 < |z - i| < 3$
8. Nyatakan bilangan kompleks $z = 2 - 2i$ dalam bentuk polar dan eksponen.
9. Hitunglah $(-2 + 2i)^{15}$.
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari: $z^3 - i = 0$.

2 FUNGSI, LIMIT DAN KEKONTINUAN

Sebelum dibahas mengenai fungsi kompleks, maka perlu dipelajari konsep-konsep topologi yang akan digunakan pada fungsi kompleks.

I. KONSEP-KONSEP TOPOLOGI PADA FUNGSI KOMPLEKS

Himpunan pada pembahasan ini adalah koleksi atau kumpulan titik-titik pada bidang Z. Dianggap anda telah memahami operasi pada himpunan yaitu gabungan, irisan, penjumlahan dan pengurangan beserta sifat-sifatnya.

1. Lingkungan/persekitaran

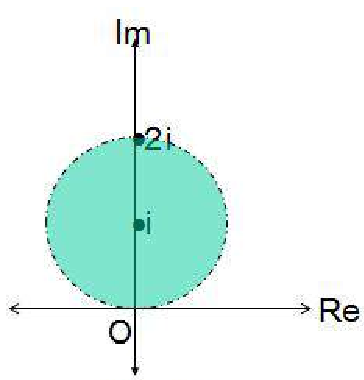
a. Persekitaran z_0 adalah himpunan semua titik z yangterletak di dalam lingkaran yang berpusat di z_0, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N(z_0, r)$ atau $|z - z_0| < r$.

b. Persekitaran tanpa z_0 adalah himpunan semua titik $z \neq z_0$ yang terletak di dalam lingkaran yang berpusat di z_0, berjari-jari r, $r > 0$. Ditulis $N^*(r > 0, r)$ atau $0 < |z - z_0| < r$.

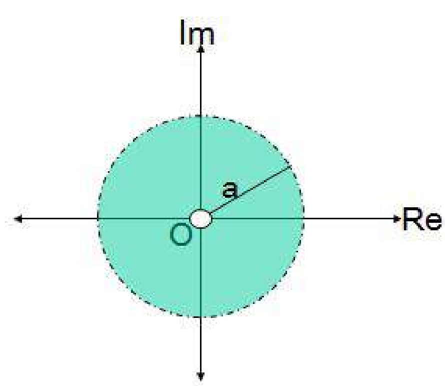
Contoh 1.1

a. $N(i, 1)$ atau $|z - i| < 1$, lihat pada gambar 1

b. $N^*(O, a)$ atau $0 < |z - O| < a$, lihat pada gambar 2



gambar 1



gambar 2

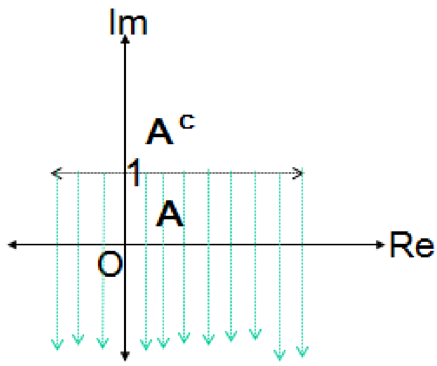
2. **Komplemen**

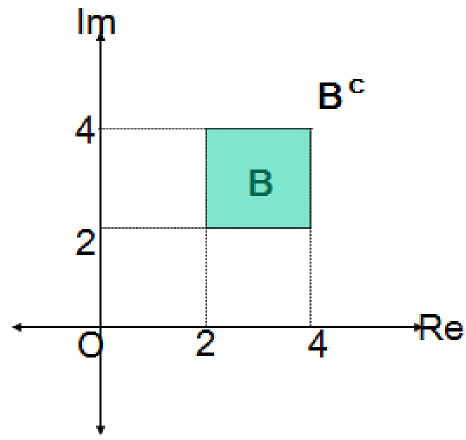
Andaikan S suatu himpunan. Komplemen dari S ditulis S^c, merupakan himpunan semua titik pada bidang $\mathbb{Z}$ yang tidak termasuk di S.

Contoh 1.2

Gambarkan, $A = \{z | \mathrm{Im}(z) < 1\}$, maka $A^c = \{z | \mathrm{Im}(z) \geq 1\}$.

$B = \{z | 2 < z < 4\}$, maka $B^c = \{z | z \leq 2 \text{ atau } z \geq 4\}$.





3. **Titik limit**

Titik z_o disebut titik limit dari himpunan S jika untuk setiap $N^*(z_o,\delta)$ maka $N^*(z_o,\delta) \cap S \neq \phi$. Jika $z_o \in S$ dan z_o bukan titik limit, maka z_o disebut titik terasing.

4. **Titik batas**

Titik z_o disebut titik batas dari himpunan S jika untuk setiap $N^*(z_o,\delta)$ memuat suatu titik di S dan memuat suatu titik yang tidak di S.

5. **Batas dari himpunan S**

adalah himpunan semua titik batas dari S.

6. **Interior dan Eksterior**

Titik z_o disebut interior dari himpunan S jika ada $N(z_o,\delta)$ sehingga $N(z_o,\delta) \subset S$. Titik yang bukan titik interior atau bukan titik batas disebut titik eksterior.

7. **Himpunan Terbuka**

Himpunan S disebut himpunan terbuka jika semua anggota S adalah titik interior S.

8. Himpunan Tertutup

Himpunan S disebut himpunan tertutup jika S memuat semua titik limitnya.

9. Himpunan Terhubung

Himpunan terbuka S disebut terhubung, jika setiap dua titik di S dapat dihubungkan oleh penggal garis yang seluruhnya terletak di S.

10. Daerah domain

Himpunan terbuka S yang terhubung disebut daerah domain.

11. Daerah Tertutup

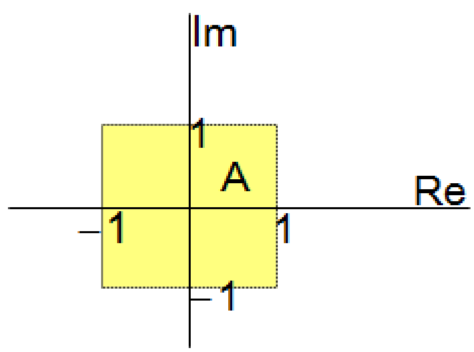
Daerah tertutup S adalah daerah terbuka digabung dengan batasnya.

12. Penutup dari himpunan S

adalah himpunan S digabung dengan titik limitnya.

Contoh 1.3

1. Diberikan $A = \{z \,||z| < 1\}$, maka:

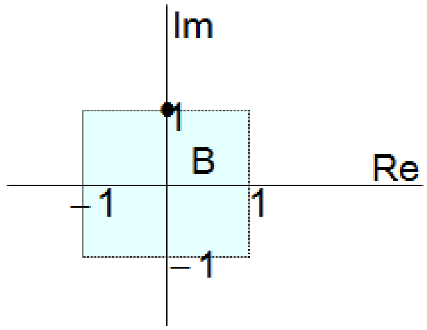


A adalah himpunan terbuka dan terhubung.

Batas dari A adalah $\{z \,||z| = 1\}$.

Penutup dari A adalah $= \{z \,||z| \leq 1\}$.

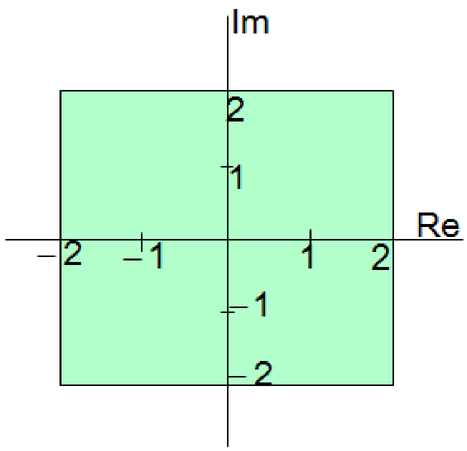
2. Diberikan $B = \{z \mid |z| < 1\} \cup \{(0,1)\}$, maka:



B adalah bukan himpunan terbuka dan juga bukan himpunan tertutup.

Titik-titik limit dari B adalah $\{z \mid |z| \leq 1\}$.

3. Diberikan $C = \{z \mid |z| \leq 2\}$, maka:



Titik-titik interior C adalah $\{z \mid |z| < 2\}$.

II. FUNGSI KOMPLEKS

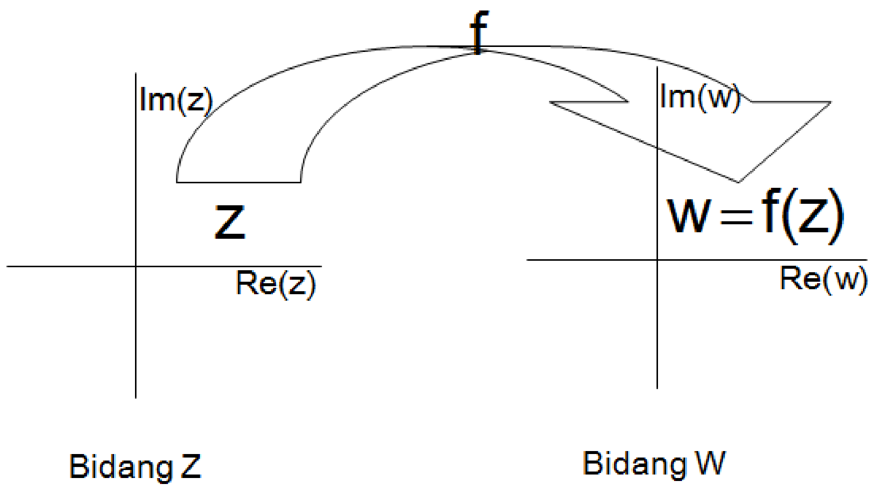
Definisi 2.1

Misalkan D himpunan titik pada bidang Z.

Fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang memasangkan setiap titik z anggota D dengan satu dan hanya satu titik w pada bidang W, yaitu (z, w).

Fungsi tersebut ditulis $w = f(z)$.

Himpunan D disebut daerah asal (domain) dari f, ditulis D_f dan $f(z)$ disebut nilai dari f atau peta dari z oleh f. Range atau daerah hasil (jelajah) dari f ditulis R_f, yaitu himpunan $f(z)$ untuk setiap z anggota D.



Contoh 2.1

a) $w = z + 1 - i$

b) $w = 4 + 2i$

c) $w = z^2 - 5z$

d) $f(z) = \frac{3-z}{2z+1}$

Contoh a), b), c) adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z. Contoh d) adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z , kecuali $z = -\frac{1}{2}$.

Jika $z = x + iy$, maka fungsi $w = f(z)$ dapat diuraikan menjadi $w = u(x, y) + iv(x, y)$ yang berarti $\text{Re}(w)$ dan $\text{Im}(w)$ masing-masing merupakan fungsi dengan dua variabel real x dan y.

Apabila $z = r(\cos\theta + i\sin\theta\,\theta)$, maka $w = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Contoh 2.2

1. Tuliskan $f(z) = 2z^2 - i$ dalam bentuk u dan v.

   Jawab :

   Misal $z = x + iy$,

   maka fungsi $w = f(z) = 2z^2 - i$

   $$= 2(x + iy)^2 - i$$

   $$= 2(x^2 + 2xyi - y^2) - i$$

$= 2(x^2 - y^2) + i(2xy - 1).$

Jadi $u = 2(x^2 - y^2)$ dan $v = 2xy - 1.$

2. Jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

   Tentukan $f(z) = z^2 + i$

   Jawab:

   $f(z) = z^2 + i$

   $= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 + i$

   $= r^2[\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta] + i$

   $= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r^2 i\ \sin 2\theta + i$

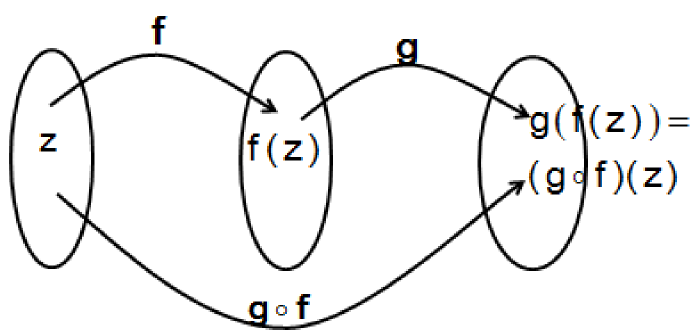
   $= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(r^2\ \sin 2\theta + 1)$

   berarti $u = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ dan $v = r^2\ \sin 2\theta + 1$

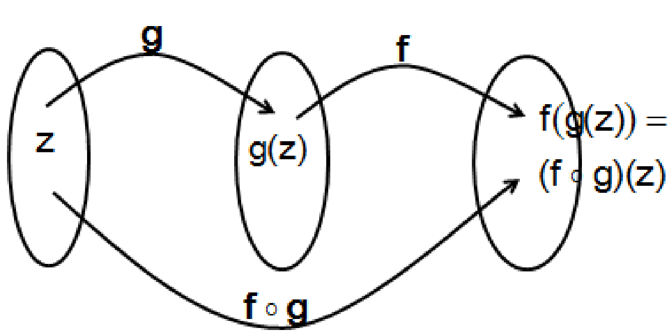
III. KOMPOSISI FUNGSI

Diberikan fungsi $f(z)$ dengan domain D_f dan fungsi $g(z)$ dengan domain D_f.

- Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(gof)(z) = g(f(z))$, dengan domain D_f.



- Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(fog)(z) = f(g(z))$, dengan domain D_g.



Jadi, tidak berlaku hukum komutatif pada $(gof)(z)$ dan $(fog)(z)$.

Contoh 3.1

Misal: $f(z) = 3z - i$ dan $g(z) = z^2 + z - 1 + i$

- Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$,

  maka $(gof)(z) = g(f(z))$

  $= g(3z - i)$

  $= (3z - i)^2 + (3z - i) - 1 + i$

  $= 9z^2 - 6iz - 1 + 3z - i - 1 + i$

  $= 9z^2 - 3z - 2 - 6iz$

- Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$,

  maka $(fog)(z) = f(g(z))$

  $= f(z^2 + z - 1 + i)$

  $= 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$

  Karena $9z^2 - 3z - 2 - 6iz \neq 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$

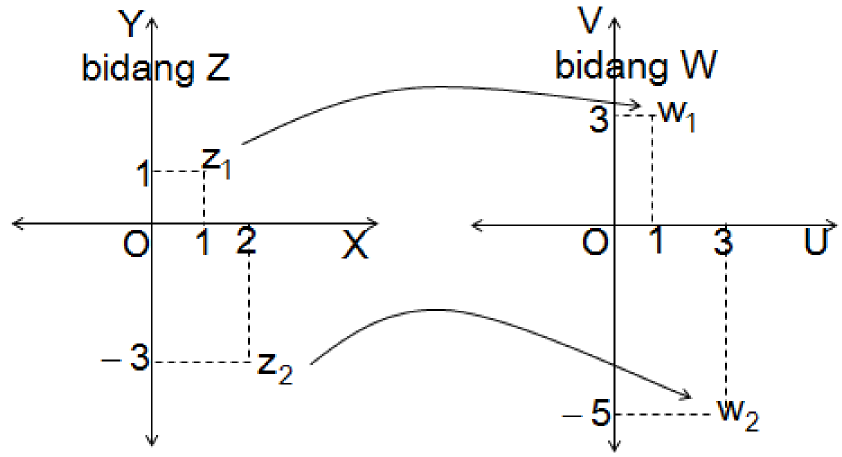
  Jadi, $(gof)(z) \neq (fog)(z)$ atau (tidak komutatif).

IV. INTERPRETASI GEOMETRIS

Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ anggota domain ada satu dan hanya satu variabel tak bebas $w = u + iv$ yang terletak pada suatu bidang kompleks. Masing-masing variabel terletak pada suatu bidang kompleks, z pada bidang Z dan w pada bidang W. Karena pasangan (z, w) mengandung 4 dimensi, maka kita tidak dapat menggambarkannya pada satu sistem. Tetapi kita dapat melihat gambaran dari $w = f(z)$. Caranya dengan memandang fungsi f tersebut sebagai pemetaan (transformasi) dari titik di bidang Z ke titik di bidang W dengan aturan f. Untuk suatu titik z maka $f(z)$ disebut peta dari z.

Contoh 4.1

Diketahui fungsi $w = 2z - 1 + i$. Untuk setiap variabel bebas $z = x + iy$ didapat nilai $w = (2x - 1) + (2y + 1)i$. Misalnya untuk $z_1 = 1 + i$, dan $z_2 = 2 - 3i$, berturut-turut diperoleh: $w_1 = 1 + 3i$, dan $w_2 = 3 - 5i$. Gambar dari z_1, z_2, w_1, dan w_2 dapat dilihat di bawah ini:



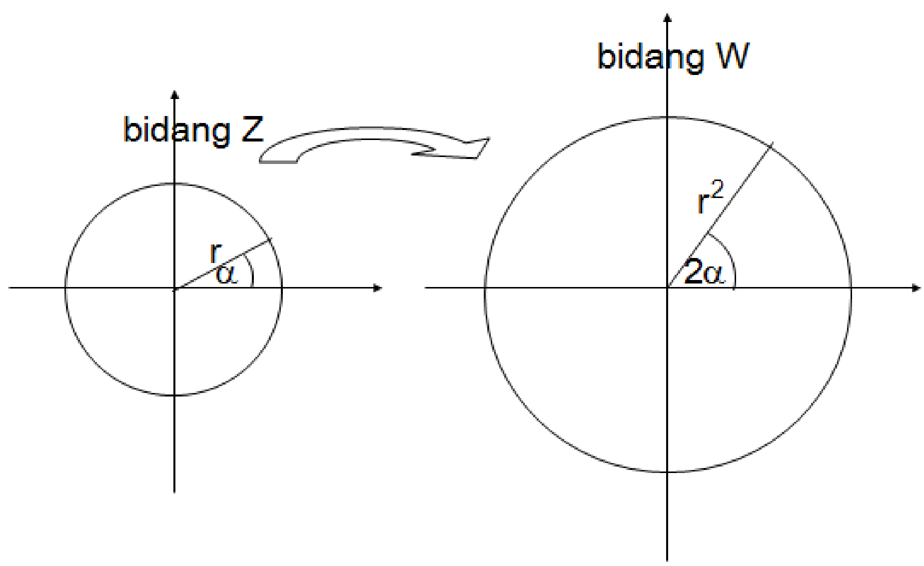
Contoh 4.2

Diketahui fungsi $w = z^2$.

Dengan menggunakan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka diperoleh $w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$.

Jika sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r pada bidang Z, maka dapat dipetakan ke bidang W menjadi sebuah lingkaran pusat O berjari-jari r^2. Daerah $0 \le \arg z \le \alpha$ dipetakan menjadi daerah $0 \le \arg w \le 2\alpha$.

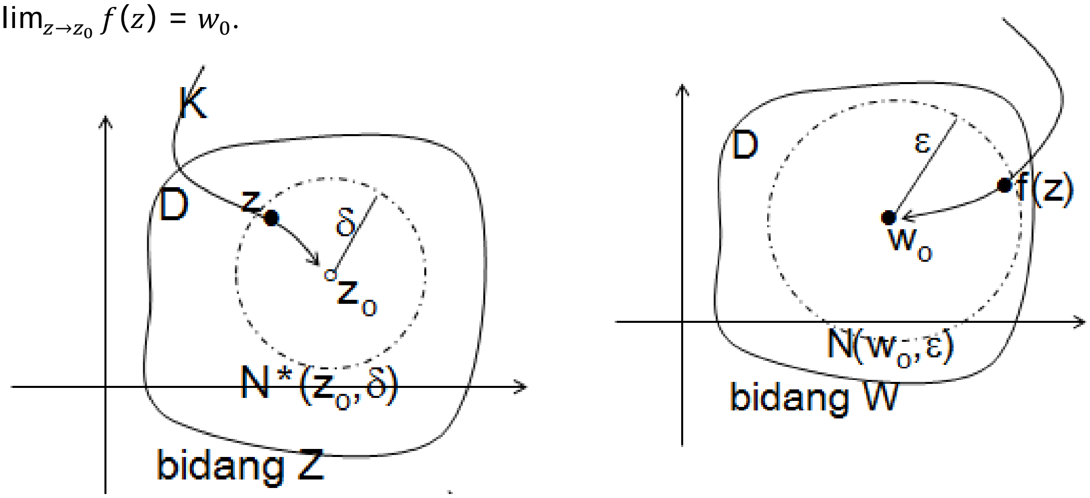
Gambar keduanya dapat dilihat di bawah ini.



V. LIMIT

Diketahui daerah D pada bidang Z dan titik z_0 terletak di dalam D atau pada batas D. Misalkan fungsi $w = f(z)$ terdefinisi pada D, kecuali di z_0.

Apabila titik z bergerak mendekati titik z_0 melalui setiap lengkungan sebarang K dan mengakibatkan nilai $f(z)$ bergerak mendekati suatu nilai tertentu, yaitu w_0 pada bidang W, maka dikatakan limit $f(z)$ adalah w_0 untuk z mendekati z_0, ditulis: $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.



Definisi 5.1

Misalkan fungsi $w = f(z)$ terdefinisi pada daerah D, kecuali di z_0 (titik z_0 di dalam D atau pada batas D). limit $f(z)$ adalah w_0 untuk z mendekati z_0, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, apabila $0 < |z - zo| < \delta$, ditulis:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Perlu diperhatikan bahwa :

1. Titik z_0 adalah titik limit domain fungsi f.
2. Titik z menuju z_0 melalui sebarang lengkungan K, artinya z menuju z_0 dari segala arah.
3. Apabila z menuju z_0 melalui dua lengkungan yang berbeda, mengakibatkan $f(z)$ menuju dua nilai yang berbeda, maka limit fungsi f tersebut tidak ada untuk z mendekati z_0.

Contoh 5.1

Buktikan bahwa: $\lim_{z \to 2} \frac{2z^2 - 3z - 2}{z - 2} = 5$

Bukti:

Misalkan diberikan bilangan $\varepsilon > 0$, kita akan mencari $\delta > 0$ sedemikian, sehingga:

$0 < |z - zo| < \delta \rightarrow \left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2} - 5\right| < \varepsilon$, untuk $z \neq 2$.

Lihat bagian sebelah kanan

Dari persamaan kanan diperoleh:

$$\left|\frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} - 5\right| < \varepsilon \leftrightarrow \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{z-2} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \left|\frac{(2z+1-5)(z-2)}{z-2}\right| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow |2(z-2)| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow |z-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ telah diperoleh.

Bukti Formal :

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $z \neq 2$, diperoleh:

$$0 < |z - 2| < \delta \rightarrow \left|\frac{2z^2 - 3z - 2}{z-2} - 5\right|$$

$$= \left|\frac{(2z+1)(z-2)}{z-2} - 5\right|$$

$$= |2(z-2)| < 2\delta = \varepsilon$$

Jadi, $\left|\frac{2z^2-3z-2}{z-2} - 5\right| < \varepsilon$ apabila $0 < |z-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Terbukti, $\lim_{z\rightarrow 2} \frac{2z^2-3z-2}{z-2} = 5$

Teorema Limit :

Teorema 5.1

Jika fungsi f mempunyai limit untuk z menuju z_0 , maka nilai limitnya tunggal.

Bukti:

Misal limitnya w_1 dan w_2, maka

$$|f(z) - w_1| = |w_1 - f(z)| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|w_1 - f(z) + f(z) - w_2| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga, $|w_1 - w_2| \leq \varepsilon$

Jadi, $w_1 = w_2$

Teorema 5.2

Misalkan $z = (x, y) = x + iy$ dan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan domain D. Titik $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ di dalam D atau batas D.

Maka, $\lim_{z \to z_0} f(z) = x_0 + iy_0$

jika dan hanya jika $\lim_{z \to z_0} u(x, y) = x_0$ dan $\lim_{z \to z_0} v(x, y) = y_0$

Teorema 5.3

Misalkan fungsi f dan g limitnya ada.

$\lim f(z) = a$ dan $\lim g(z) = b$, maka

1. $\lim(f(z) + g(z)) = a + b$ (untuk $z \to z_0$)
2. $\lim(f(z).g(z)) = a.b$ (untuk $z \to z_0$)
3. $\lim(\frac{f(z)}{g(z)}) = \frac{a}{b}$ (untuk $z \to z_0$)

Tugas : Buktikan ketiga teorema limit tersebut !

Contoh 5.2

Hitunglah $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z-i}$

Jawab:

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = \lim_{z \to i} \frac{(z + i)(z - i)}{z - i}$$
$$= \lim_{z \to i}(z + i)$$
$$= 2i$$

Contoh 5.3

Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y+1}$. Buktikan $\lim_{z \to 0} f(z)$ tidak ada!

Bukti :

Kita tunjukkan bahwa untuk z menuju 0 di sepanjang garis $y = 0$, maka

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(z) = \lim_{x \to 0} x^2 i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sedangkan di sepanjang garis $y = x$,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(z) = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x^2}{x+1} i\right) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dari (1) dan (2), terbukti $\lim_{z\to 0} f(z)$ tidak ada.

VI. KEKONTINUAN FUNGSI

Definisi 6.1

Misalkan fungsi $f(z)$ terdefinisi di D pada bidang Z dan titik z_0 terletak pada interior D, fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_0 jika untuk z menuju z_0, maka $\lim f(z) = f(z_0)$.

Jadi, ada tiga syarat fungsi $f(z)$ kontinu di z_o, yaitu :

1. $f(z_0)$ ada
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu pada suatu daerah R, jika $f(z)$ kontinu pada setiap titik pada daerah R tersebut.

Teorema 6.1

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f(z)$ terdefinisi di setiap titik pada daerah R, dan $z_0 = x_0 + iy_0$ titik di dalam R, maka fungsi $f(z)$ kontinu di z_0 jika dan hanya jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ masing-masing kontinu di (x_0, y_0).

Teorema 6.2

Andaikan $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di z_0, maka masing-masing fungsi :

1. $f(z) + g(z)$
2. $f(z). g(z)$
3. $\frac{f(z)}{g(z)}, g(z) \neq 0$
4. $f(g(z))$; f kontinu di $g(z_0)$, kontinu di z_0.

Contoh 6.1

Fungsi $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i}, & z \neq 2i \\ 3 + 4z, & z = 2i \end{cases}$, apakah kontinu di $2i$?

Jawab :

$f(2i) = 3 + 4(2i) = 3 + 4i$,

sedangkan untuk z mendekati $2i$, $\lim f(z) = z + 2i$,

sehingga, $\lim_{z \to 2i} f(z) \neq f(2i)$

jadi $f(z)$ diskontinu di $z = 2i$.

Contoh 6.2

Dimanakah fungsi $g(z) = \frac{z^2+1}{z^2-3z+2}$ kontinu ?

Jawab :

Coba anda periksa bahwa $g(z)$ diskontinu di $z = 1$ dan $z = 2$. Jadi $g(z)$ kontinu di daerah $\{z \big| |z| > 2\}$.

3 TURUNAN

I. DEFINISI TURUNAN

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan $z_0 \in D$.

Jika diketahui bahwa nilai $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ada, maka nilai limit ini dinamakan *turunan* atau *derivatif* fungsi f di titik z_0.

Dinotasikan : $f'(z_0)$.

- Jika $f'(z_0)$ ada, maka f dikatakan *terdifferensial* atau *diferensiabel* di z_0.

  Dengan kata lain : $f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$
- Jika f *terdifferensial* di semua titik pada D, maka f *terdifferensial* pada D

Contoh 1.1

Buktikan $f(z) = z^2$ terdifferensiasi diseluruh $\mathbb{C}$

Bukti :

Ditinjau sebarang titik $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{(z+z_0)(z-z_0)}{z-z_0}$$

$$= 2z_0$$

Karena z_0 sebarang maka $f(z) = z^2$ terdefferensial di seluruh $\mathbb{C}$.

Teorema 1.1

Jika f fungsi kompleks dan $f'(z_0)$ ada, maka f kontinu di z_0

Bukti :

Diketahui $f'(z_0)$ ada

Akan dibuktikan f kontinu di z_0 atau $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\lim_{z \to z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big) = \lim_{z \to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.(z - z_0)\right)$$

$$= \lim_{z \to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.\lim_{z \to z_0}(z - z_0)$$

$$= f'(z).0$$

$$= 0$$

Sehingga, $\lim_{z \to z_0} f(z) =, \lim_{z \to z_0} f(z_0) = f(z_0)$

dengan kata lain f kontinu di z_0.

Contoh 1.2

Buktikan $f(z) = |z|^2$ kontinu di seluruh bidang kompleks tetapi hanya terdifferensial di $z = 0$

Bukti :

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ berarti $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $v(x, y) = 0$

u dan v kontinu di D, maka $f(z)$ kontinu di D.

$$f'(0) = \lim_{z \to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$

$$= \lim_{z \to 0}\frac{|z|^2}{z}$$

$$= \lim_{z \to 0}\frac{z\bar{z}}{z}$$

$$= 0$$

Jadi $f(z)$ terdifferensial di $z = 0$.

II. SYARAT CHAUCHY-RIEMANN

Syarat yang diperlukan agar fungsi f terdiferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$ adalah syarat Chauchy-Riemann, yang menghubungkan derivatif-derivatif parsial tingkat pertama dari fungsi bagian real dan fungsi bagian imajiner dari f.

Teorema 2.1 (SYARAT CHAUCHY-RIEMANN)

Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdifferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$, maka $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ mempunyai derivatif parsial pertama di (x_0, y_0) dan di titik ini dipenuhi persamaan Cauchy – Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad dan \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

derivatif f di z_0 dapat dinyatakan dengan

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Jika persamaan C-R tidak dipenuhi di (x_0, y_0) maka

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tidak terdifferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$

Contoh 2.1

Buktikan $f(z) = |z|^2$ tidak terdifferensiasi di $z \neq 0$

Bukti :

$f(z) = x^2 + y^2$ sehingga $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $v(x, y) = 0$

Persamaan Cauchy – Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \leftrightarrow 2x = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \leftrightarrow 2y = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

(1) dan (2) tidak dipenuhi jika $x \neq 0$ atau $y \neq 0$, jadi pasti f tidak terdeferensial di $z \neq 0$.

CATATAN :

Syarat C-R hanya syarat perlu untuk keterdifferensialan.

Contoh 2.2

Buktikan fungsi $f(z) = \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}$

dan $f(0) = 0$, tidak terdifferensial di 0, memenuhi C-R.

Bukti :

$u = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ dengan $u(0,0) = 0$

$v = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ dengan $v(0,0) = 0$

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0,0)}{x} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(y,0) - u(0,0)}{y} = -1$$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(y,0) - v(0,0)}{y} = 1$$

Jadi persamaan Cauchy – Riemann terpenuhi.

Tetapi,

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

Untuk $z \to 0$ sepanjang garis real $y = 0 \to \lim_{x \to 0} \frac{x^3(1+i)}{x^3} = 1 + i$

Untuk $z \to 0$ sepanjang garis real $y = x \to \lim_{x \to 0} \frac{2ix^3}{2(1+i)x^3} = \frac{i}{1+i}$

Jadi, $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$ tidak ada.

Sehingga f tidak terdifferensial di 0 meskipun persamaan C-R dipenuhi di $(0,0)$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa :

i) Syarat perlu

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$f'(z)$ ada maka $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ada di (x_0, y_0)

berlaku C-R yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dan $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

ii) Syarat cukup

$u(x,y), v(x,y), ux(x,y), vx(x,y), uy(x,y), vy(x,y)$ kontinu

pada kitar $z_0 = x_0 + iy_0$ dan di (x_0, y_0)dipenuhi C-R maka $f'(z_0)$ ada

Contoh 2.3

Buktikan $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ terdiferensial untuk setiap z dalam $\mathbb{C}$.

Bukti :

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) = e^x \cos y \rightarrow u_x(x,y) &= e^x \cos y \\ u_y(x,y) &= -e^x \sin\ y \\ v(x,y) = e^x \sin y \rightarrow v_x(x,y) &= e^x \sin y \\ v_y(x,y) &= e^x \cos y \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{ada dan} \\ \text{kontinu di} \\ \text{setiap (x,y)} \in \mathbb{C}\end{array}$$

Berdasarkan persamaan C-R :

$u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ dipenuhi di $\forall(x,y)\in\mathbb{C}$, dan ada kitar dimana keenam fungsi kontinu dan C-R dipenuhi di (x,y).

Jadi $f'(z)$ ada $\forall z\in\mathbb{C}$.

Dan $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$

$= e^x \cos y + ie^x \sin y$

III. SYARAT C-R PADA KOORDINAT KUTUB

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dapat diilustrasikan dalam koordinat kartesius maka dengan menggunakan hubungan $x = r\cos\varphi$ dan $y = r\sin\varphi$, diperoleh $z = r\cos\varphi + i\sin\varphi$, sehingga $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ dalam sistem koordinat kutub.

Teorema 3.1

Jika $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ terdiferensial dan kontinu pada suatu kitar (r_0,φ_0) dan jika dalam kitar tersebut $u_r, u_\varphi, v_r, v_\varphi$ ada dan kontinu di (r_0,φ_0) dan dipenuhi C-R yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0$$

maka $f'(z) =$ ada di $z = z_0$ dan $f'(z) = (\cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0)\,[u_r(r_0,\varphi_0) + i\,v_r(r_0,\varphi_0)]$

Contoh 3.1

Diketahui $f(z) = z^{-3}$, tentukan $f'(z)$ dalam bentuk kootdinat kutub.

Jawab :

$f(z) = z^{-3} = r^{-3}(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)$, maka :

$u = r^{-3}\cos 3\varphi$, sehingga $u_r = -3r^{-4}\cos 3\varphi$ dan

$u_\varphi = -r^{-3}\sin 3\varphi$

$v = -r^{-3}\sin 3\varphi$, sehingga $v_r = 3r^{-4}\sin 3\varphi$ dan

$v_\varphi = -r^{-3}\cos 3\varphi$

keenam fungsi ini kontinu dan syarat C-R dipenuhi untuk semua $z \neq 0$

Jadi $f(z) = z^{-3}$ terdiferensial untuk $z \neq 0$

Dengan demikian $f'(z)$ dalam koordinat kutub adalah :

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\cos\varphi - i\sin\varphi)\,(-3r^{-4}\cos 3\varphi + i3r^{-4}\sin 3\varphi) \\ &= \text{cis}\,(-\varphi)\,(-3r^{-4})\,\text{cis}(-3\varphi) \\ &= -3r^{-4}\,cis(-4\varphi) \end{aligned}$$

IV. ATURAN PENDIFERENSIALAN

Jika $f(z), g(z)$ dan $h(z)$ adalah fungsi- fungsi kompleks serta $f'(z), g'(z)$ dan $h'(z)$ ada, maka berlaku rumus-rumus:

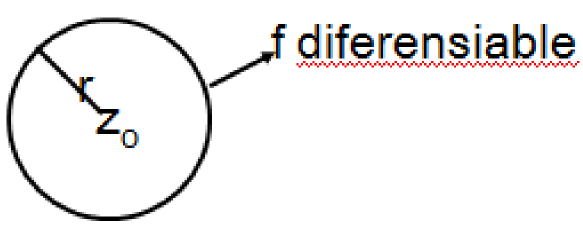
1. $\frac{dc}{dz} = 0, \frac{d(z)}{dz} = 1$
2. $\frac{d[cf(z)]}{dz} = cf'(z)$
3. $\frac{d}{dx}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$
4. $\frac{d}{dx}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
5. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$
6. $\frac{dz^n}{dx} = nz^{n-1}$
7. Jika $h(z) = g[f(z)]\ maka\ h'(z) = g'[f(z)]f'(z)$ biasa disebut dengan komposisi (aturan rantai)

   $$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dz}$$

V. FUNGSI ANALITIK

Definisi 5.1

Fungsi f analitik di z_0, jika ada $r > 0$ sedemikian, hingga $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in N(z_0, r)$ (persekitaran z_0)



Fungsi analitik untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dinamakan **fungsi utuh**

Contoh 5.1

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = x^3 + iy^3$

   diperoleh : $u = x^3$; $v = y^3$ sehingga

   $u_x = 3x^2$; $v_x = 0$; $u_y = 0$; $v_y = 3y^2$

   dengan menggunakan persamaan C-R :

   $3x^2 = 3y^2 \Rightarrow y = \pm x$ dan $v_x = u_y = 0$

   persamaan C-R dipenuhi dan kontinu digaris $y = \pm x$

   berarti $f'(z)$ ada hanya di $y = \pm x$

   Jadi $f(z)$ tidak analitik dimanapun karena tidak ada kitar.

Misalnya f dan g analitik pada D, maka :

- $f \pm g$ merupakan fungsi analitik
- fg merupakan fungsi analitik
- f/g merupakan fungsi analitik dengan $g \neq 0$
- $h = g \circ f$ merupakan fungsi analitik
- berlaku aturan L'hospital yaitu :

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \quad \text{dengan } g(z) \neq 0 \text{ dan } g'(z) \neq 0$$

VI. TITIK SINGULAR

Definisi 6.1

Titik z_1 disebut titik singular dari f jika f tidak analitik di z_1 tetapi untuk setiap kitar dari z_1 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik.

Jenis kesingularan $f(z)$ atau titik singular antara lain :

1. **Titik singular terisolasi**

   Titik z_0 dinamakan **titik singular terisolasi** dari $f(z)$ jika terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga lingkaran $|z - z_0| = \delta$ hanya melingkari titik singular lainnya. Jika δ seperti itu tidak ada, maka $z = z_0$ disebut **titik singular tidak terisolasi.**

2. **Titik Pole (titik kutub)**

Titik $z = z_0$ disebut titik pole tingkat n, jika berlaku

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

Jika $n = 1$, z_0 disebut sebagai titik pole sederhana.

3. Titik Cabang

Dari fungsi bernilai banyak dapat menjadi titik singular.

4. Titik Singular dapat dihapuskan

Titik singular z_0 disebut **titik singular dapat dihapuskan** dari f(z) jika $\lim_{z \to 0} f(z)$ ada.

5. Titik Singular Essensial

Titik singular $z = z_0$yang tidak memenuhi syarat titik singular pole titik cabang atau titik singular yang dapat dihapuskan disebut **titik singular essensial.**

6. Titik Singular tak hingga

Jika $f(z)$ mempunyai titik singular di $z = \infty$, maka sama dengan menyatakan $f(\frac{1}{w})$ mempunyai titik singular di $w = 0$.

Contoh 6.1

- $g(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ berarti titik $z = i$ adalah titik pole tingkat 2 dari $g(z)$
- $(z) = |z|^2$ tidak merupakan titik singular
- $k(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ maka titik cabang adalah $z_1 = 1$ dan $z_2 = -2$ karena $(z^2 + z - 2) = (z-1)(z+2) = 0$

VII. FUNGSI HARMONIK

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada D maka u dan v mempunyai derivatif parsial di semua orde yang kontinue pada D. Jadi dalam D berlaku C-R , $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$.

Karena derifatif-derivatif parsial dari u dan v kontinue dalam D, maka berlaku $v_{xy} = v_{yx}$. Jika dalam $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ diderivatifkan parsial terhadap x dan y maka $\forall (x,y) \in D$ berlaku $u_{xx} = u_{yy} = 0$ dan $v_{xx} = v_{yy} = 0$.

Jika f analitik pada D maka u dan v pada D memenuhi **persamaan differensial Laplace** dalam 2 dimensi.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

u dan v dimana $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada suatu domain maka $\boldsymbol{f(z)}$ **harmonik** pada domain tersebut.

Dua fungsi u dan v sedemikian sehingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik dalam suatu domain dinamakan **dua fungsi yang harmonik konjugat** dalam domain itu.

Contoh 7.1

Diberikan $u(x, y)$ harmonik pada D dan tentukan fungsi v yang harmonik konjugat dengan $v = 4xy^3 - 12x^3y,\ (x, y) \in \mathbb{C}$

Jawab :

Misal diklaim konjugatnya adalah $v(x, y)$

jadi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga berlaku C-R $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

$u_x = 4y^3 - 12x^2y \quad v_y = 4y^3 - 12x^2$

$u_y = 12xy^2 - 4x^3 \quad v = y^4 - 6x^2y^2 + g(x)$

karena $v_x = -u_y$ maka $-12xy^2 + g'(x) = -12xy^2 + 4x^3$ sehingga $g'(x) = 4x^3$

diperoleh $g(x) = x^4 + C$

Jadi $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + C$

CARA MILNE THOMSON

Cara yang lebih praktis menentukan fungsi harmonik konjugat atau dari fungsi harmonik u diberikan $u(x, y)$ harmonik pada D andaikan $v(x, y)$ sehingga

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada D

$f''(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$

sesuai persamaan C-R : $f''(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$

$z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$ sehingga diperoleh

$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad$ dan $\qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$f(z) = u_x\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iu_y\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

Suatu identitas dalam z dan $\bar{z}$, jika diambil $\bar{z} = z$ maka

$f'^{(z)} = u_x(z,0) - iu_y(z,0)$. Jadi $f(z)$ adalah fungsi yang derivatifnya $u_x(z,0) - iu_y(z,0)$ kemudian didapat $v(x,y)$

Contoh 7.1

Dari Contoh 1 dengan $u = 4xy^3 - 4x^3y$, $(x,y) \in \mathbb{C}$, jika diselesaikan dengan menggunakan cara Milne Thomson.

Jawab :

$u_x = 4y^3 - 12x^2y$

$u_y = 12xy^2 - 4x^3$

$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0)$

$= -i(-4z^3)$

$= 4iz^3$

sehingga $f(z) = iz^4 + A$

$f(z) = i(x + iy)^4 + A$

$= 4xy^3 - 4x^3y + i(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + A$

DAFTAR PUSTAKA

Ruel V. Churchill. 1984. *Complex variables and applications.* New York : McGraw-Hill.

Marsden, Jerrold. E. 1999. *Basic Complex Analysis.* New York: California State University.