BUKU DIKTAT

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

OLEH:

DWI IVAYANA SARI, M.Pd

SEKOLAH TINGGI KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PENDIDIKAN MATEMATIKA

2012

DAFTAR ISI

BAB I

Matriks dan Operasi – Operasinya

A. Definisi Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segi empat siku-siku. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut *entri* dalam matriks tersebut.

Contoh 1.1

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & \pi & -2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, [-6]$$

Ukuran matriks dinyatakan dengan banyaknya baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal).

Misalnya, matriks pertama dalam Contoh 1.1 berukuran 3×2, karena matriks tersebut memiliki tiga baris dan dua kolom. Matriks-matriks lainnya pada contoh 1.1 memiliki ukuran $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1, 1 \times 1$.

Secara umum suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas *m* baris dan *n* kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) $m \times n$.

Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan *m* baris dan *n* kolom) adalah A_{mxn}, B_{mxn} dan seterusnya.

Bentuk umum dari matriks A_{mxn} adalah:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} disebut elemen dari A yang terletak pada baris i dan kolom j.

Dua matrik disebut sama, jika ordonya sama dan entri yang seletak bernilai sama, matrik A dan B sama ditulis A = B.

Contoh 1.2

Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 2a & 3 \\ 1 & 4b \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 3c \\ c & 3+b \end{bmatrix}$. Jika matriks A sama dengan matriks B, tentukan nilai a, b dan c.

Jawab

Karena matriks A = B, maka entri-entri yang seletak bernilai sama, sehingga

$2a = -2 \rightarrow a = -1$

$4b = 3 + b \rightarrow b = 1$

$c = 1$

B. Jenis-Jenis Matriks

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui yaitu:

1. Matriks Kolom dan Matriks Baris

Matriks kolom adalah matriks hanya satu kolom (disebut juga vektor kolom). Jadi pada contoh 1.1 matriks 2×1 adalah matiks kolom.

Matriks baris adalah matriks hanya satu baris (disebut juga vektor baris). Jadi pada contoh 1.1 matriks 1×4 adalah matiks baris.

Sedangkan matriks 1×1 pada contoh 1 adalah matirks kolom dan matriks baris.

2. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Pada matriks persegi yang berukuran $n \times n$, terdapat istilah diagonal utama. Elemen-elemen diagonal utama sebanyak n yaitu : a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

Contoh 1.3

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ Elemen diagonal a_{11} dan a_{22}

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ Elemen diagonal a_{11}, a_{22} dan a_{33}

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks yang elemen bukan diagonalnya bernilai nol.

Dalam hal ini tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal harus tak nol.

Contoh 1.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang elemen – elemen dibawah atau diatas elemen diagonal bernilai nol.

Ada 2 jenis matriks segitiga, yaitu:

a. Matriks Segitiga Atas adalah matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama bernilai nol.

b. Matriks Segitiga Bawah adalah matriks yang elemen-elemen di atas diagonal utama bernilai nol.

Contoh 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks segitiga atas, matriks B adalah matriks segitiga bawah dan matriks C adalah matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

5. Matriks Identitas

Matriks Identitas adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya bernilai 1.

Contoh 1.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Nol

Matriks Nol adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol.

Contoh 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Matriks Berbentuk Esselon Baris

Suatu matriks dikatakan berbentuk eselon baris jika memenuhi syarat– syarat berikut :

a. Untuk semua baris yang elemen – elemennya tak–nol , maka bilangan tak nol pertama pada baris tersebut haruslah = 1 (1 disebut satu utama).

b. Untuk sembarang dua baris yang berurutan, maka satu utama yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih ke kanan daripada satu utama pada baris yang lebih atas.

c. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.

Contoh 1.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notasi 1 menyatakan 1 utama.

8. **Matriks Berbentuk Esselon Baris Tereduksi**

Suatu matriks dikatakan berbentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi syarat–syarat berikut :

a. Syarat 1 – 3 pada matriks berbentuk esselon baris
b. Kolom yang memiliki satu utama harus memiliki elemen nol ditempat lainnya.

Contoh 1.9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C. Operasi Pada Matriks

1. **Penjumlahan Matriks**

Operasi penjumlahan dapat dilakukan pada dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama.

Aturan penjumlahan yaitu dengan menjumlahkan elemen – elemen yang letaknya bersesuaian pada kedua matriks.

Contoh 1.10

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

2. **Perkalian Matriks dengan Matriks**

Operasi perkalian matriks dapat dilakukan pada dua buah matriks (A dan B) jika jumlah kolom matriks A = jumlah baris matriks B.

Aturan perkalian

Misalkan Amn dan Bnk maka Amn Bnk = Cmk dimana elemen – elemen dari C (cij) merupakan penjumlahan dari perkalian elemen–elemen A baris i dengan elemen – elemen B kolom j.

Contoh 1.11

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} k & n \\ l & o \\ m & p \end{bmatrix} \text{ maka } A_{23}\,B_{32} = C_{22} = \begin{bmatrix} ak+bl+cm & an+bo+cp \\ dk+el+fm & dn+eo+fp \end{bmatrix}$$

3. **Perkalian Matriks degan Skalar**

   Suatu matriks dapat dikalikan suatu skalar k dengan aturan tiap –tiap elemen pada A dikalikan dengan k.

   Contoh 1.12

$$3\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{bmatrix}$$

4. **Transpose Matriks**

   Transpose matriks A (dinotasikan A^t) didefinisikan sebagai matriks yang baris – barisnya merupakan kolom dari A.

   Contoh 1.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

D. Matriks Invers

Definisi

Jika A, B matriks persegi dan berlaku AB = BA = I (I matriks identitas), maka dikatakan bahwa A dapat dibalik dan B adalah matriks invers dari A (notasi A^{-1}).

Contoh 1.14

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$

Sifat-sifat yang berlaku :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Latihan I

1. Tentukan jenis dari matriks – matriks di bawah ini (jika memenuhi lebih dari satu, tuliskan semua)!

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
   a. Hitung B + C!
   b. Tentukan AB dan AC, kemudian tentukan AB + AC!
   c. Dari perhitungan B + C, tentukan A(B + C). kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban b!

3. Dari soal nomor 2, tentukan:
   a. $(AB)^t$ dan $(AC)^t$!
   b. Hitung B^tA^t dan C^tA^t , kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban a!

4. Tunjukkan apakah matriks B merupakan invers A!
   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BAB II
SISTEM PERSAMAAN LINEAR

A. Persamaan Linear

Definisi

Suatu persamaan linear dalam *n* peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai suatu persamaan yang dapat disajikan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b konstanta real.

Contoh 2.1

1. $x + 3y = 7$
2. $x + 3y^2 = 1$
3. $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 9$
4. $2x + y - xz + z = 3$
5. $y = \sin x - 1$
6. $y = 2x - 3z$

Nomor 1, 3, 6 adalah contoh persamaan llinear, sedangkan nomor 2, 4, 5 adalah bukan contoh persamaan linear.

Penyelesaian (solusi) suatu persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ adalah barisan *n* bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$, sedemikian sehingga persamaan tersebut bernilai benar, jika kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Himpunan semua penyelesaian persamaan tersebut disebut himpunan penyelesaian.

B. Sistem Persamaan Linear

Definisi

Sistem persamaan linear adalah suatu himpunan terhingga dari persamaan linear dalam peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$

Contoh 2.2

a. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$ b. $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$

Pada contoh a, merupakan sistem persamaan linear dengan 2 peubah, sedangkan contoh b, merupakan sistem persamaan linear dengan 3 peubah.

Barisan bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ disebut penyelesaian sistem persamaan linear tersebut, jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ merupakan penyelesaian (solusi) dari setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Tidak semua sistem persamaaan linear memiliki penyelesaian (solusi), sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada diagram berikut:

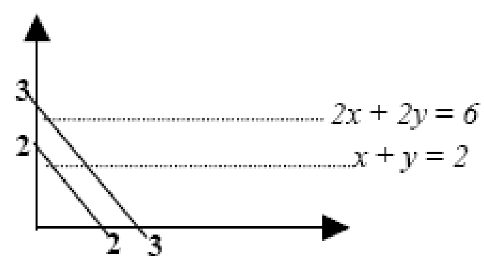
$$\text{SPL}\begin{cases} \text{tidak memiliki penyelesaian (tak konsisten)} \\ \text{memiliki penyelesaian (konsisten)} \begin{cases} \text{solusi tunggal} \\ \text{solusi banyak} \end{cases} \end{cases}$$

Pada sistem persamaaan linear dengan dua peubah, secara geometris jika SPL tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar, jika penyelesaiannya tunggal maka himpunan penyelesaiannya berupa sebuah titik hasil perpotongan dua garis sedangkan jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit.

Contoh 2.3

a. $x + y = 2$ grafiknya:

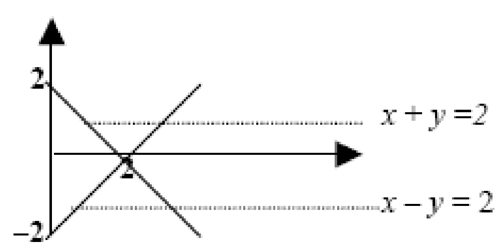
$2x + 2y = 6$



Grafik tersebut menunjukkan bahwa kedua garis sejajar sehingga tidak penyelesaian yang memenuhi sehingga disimpulkan bahwa SPL tidak konsisten.

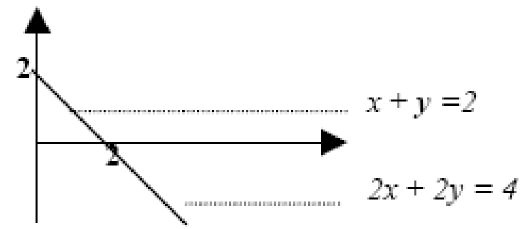
b. $x + y = 2$ grafiknya:

$x - y = 2$



Grafik tersebut menunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari SPL adalah titik potong antara $x + y = 2$ dan $x - y = 2$ yaitu titik (2,0). Jadi penyelesaian dari SPL adalah tunggal yaitu $x = 2$ dan $y = 0$.

c. $x + y = 2$ grafiknya:
$2x + 2y = 4$



Grafik diatas bahwa $x + y = 2$ dan $2x + 2y = 4$ saling berhimpit sehingga hanya terlihat seperti satu garis saja. Himpunan penyelesaian dari SPL semua titik yang terletak disepanjang garis tersebut. Misalkan diambil $x = 0$ maka didapatkan $y = 2$ yang memenuhi persamaan, jika $x = 1$ maka nilai $y = 1$ adalah nilai yang memenuhi. Secara matematis dapat dituliskan sebagai : $\{ (x, y) | x = 2 - y , x \in R , y \in R \}$.

Untuk kasus sistem persamaan linear dengan menggunakan dua peubah, pembuatan grafik untuk menentukan himpunan penyelesaian seperti ini masih memungkinkan, hanya saja untukSPL dengan banyaknya peubah lebih dari dua hal ini sulit dilakukan. Berikut ini ada suatu cara untuk menyelesaiakn SPL jika banyaknya peubah lebih dari dua.

C. Operasi Baris Elementer

Ketika dihadapi masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear terutama yang menggunakan banyak peubah, maka hal pertama yang dapat digunakan untuk menyederhanakan permasalahan adalah dengan mengubah sistem persamaan linear yang ada ke dalam bentuk matriks.

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaiakan SPL dengan banyak peubah, yaitu:

1. Mengubah SPL ke dalam bentuk matriks diperbesar
   Untuk melihat secara lebih mudah definisi dari matriks diperbesar akan ditunjukkan berikut ini :
   Diketahui SPL dengan m buah persamaan linear dan n peubah
   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
   ....
   $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Sistem persamaan linear diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks AX = B dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdot & \cdot & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{b_m} \end{bmatrix}$$

Matriks yang memiliki berukuran n × 1 atau 1 × n biasa disebut vektor. Penulisan vector sedikit berbeda dengan penulisan matriks, yaitu menggunakan huruf kecil dengan cetak tebal atau digaris atasnya . Jadi matriks X dan B diatas biasa dituliskan sebagai x dan b atau $\bar{x}$ dan $\bar{b}$ sehingga SPL dapat dituliskan sebagai $\bar{x} \; = \; \bar{b}$. Pada SPL yang berbentuk seperti ini , matriks A juga biasa disebut sebagai *matriks konstanta*.

Untuk menyelesaikan persamaan linear diatas maka dibuat matriks diperbesar dari A dan $\bar{b}$ yang elemen – elemennya merupakan gabungan elemen matriks A dan vektor $\bar{b}$ yang dinotasikan $[A \,|\bar{b}\,]$, yaitu

$$[A \,|\bar{b}\,] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

2. Mengubah bentuk matriks diperbesar menjadi bentuk matriks eselon baris tereduksi melalui prosedur eliminasi Gauss – Jordan. Pada proses eliminasi tersebut operasi – operasi yang digunakan disebut Operasi Baris Elementer (OBE).

   Dalam operasi baris elementer ini ada beberapa operasi yang dapat digunakan, yaitu:

   a. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol
   b. Mempertukarkan dua buah baris
   c. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya

   Dengan menggunakan operasi baris elementer, maka matriks eselon baris tereduksi yang didapatkan akan ekuivalen dengan matriks awalnya sehingga penyelesaian untuk matriks eselon baris tereduksi juga merupakan penyelesaian untuk matriks diperbesar.

   Untuk menyelesaikan persamaan linear dengan eliminasi Gauss–Jordan dapat ditunjukkan dalam contoh berikut:

Contoh 2.4

a.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 5y + 3z &= 6 \\ x + 8z &= -6 \end{aligned}$$

Matriks diperbesar $\left[A \mid \bar{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & -6 \end{array}\right]$

Operasi Baris Elementer menghasilkan:

$$\left[A \mid \bar{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & -6 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ b2-2b1 \\ b3-b1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} b1-2b2 \\ \\ b3+2b2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ -b3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} b1-9b3 \\ b2+3b3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \text{bentuk eselon baris}$$

tereduksi

Dari bentuk eselon baris tereduksi maka dapat dibuat persamaannya , yaitu :
Dari baris 1 (b1) → $x + 0y + 0z = 2$ → $x = 2$
Dari baris 2 (b2) → $0x + y + 0z = 1$ → $y = 1$
Dari baris 3 (b3) → $0x + 0y + z = -1$ → $z = -1$

Jadi penyelesaian SPL diatas adalah tunggal , yaitu : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. Sistem Persamaan Linear Homogen

Sistem Persamaan Linear Homogen merupakan kasus khusus dari Sistem persamaan linear biasa $A\bar{x} = \bar{b}$ untuk kasus $\bar{b} = 0$. Karena bentuknya yang demikian maka pastilah pada matriks diperbesar $[A|\bar{b}]$ setelah dilakukan eliminasi Gauss–Jordan kolom terakhirnya akan selalu nol sehingga penyelesaian dari SPL akan selalu ada. Ada dua macam penyelesaian dalam SPL homogen ini yaitu trivial (tak sejati) dan tak trivial (sejati).

Penyelesaian trivial terjadi jika satu – satunya penyelesaian untuk SPL adalah $\bar{x} = 0$ hal ini terjadi jika semua kolom pada matriks diperbesar $[A|\bar{b}]$ (setelah dilakukan eliminasi Gauss– Jordan) memiliki satu utama kecuali untuk kolom yang terakhir atau dengan kata lain semua kolom pada matriks A memiliki satu utama. Jika hal yang sebaliknya terjadi yaitu tidak semua kolom pada matriks A (setelah dilakukan eliminasi Gauss–Jordan) memilki satu utama atau jika terdapat baris nol maka penyelesaian untuk SPL adalah penyelesaian tak trivial yaitu penyelesaian tak hingga banyak.

Contoh 2.5

Diketahui sistem persamaan linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari SPL homogen diatas adalah

$$\left[A \mid \bar{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Pada matriks yang terakhir terlihat bahwa semua kolom matriks A memiliki satu utama

sehingga penyelesaiannya adalah trivial yaitu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.6

Diketahui sistem persamaan linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari SPL homogen diatas adalah:

$$\left[A \mid \bar{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pada matriks yang terakhir terlihat bahwa hanya dua kolom dari matriks A yang memiliki satu utama atau terdapat dua baris nol , ini berarti bahwa penyelesaian SPL adalah tak trivial yaitu penyelesaian banyak dengan dua parameter yaitu:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 2z \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ jika diambil } z = s \text{ dan } w = t, \quad s, t \in \mathrm{R} \text{ maka } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2s \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

E. Menentukan Matriks Invers

Pada bab sebelumnya sudah dibahas tentang invers suatu matriks. Invers suatu matriks (misalkan invers A) dapat dihitung dengan menggunakan eliminasi Gauss–Jordan terhadap matriks diperbesar $[A\,|I]$ dimana ukuran I sama dengan ukuran A. Cara perhitungan seperti ini didasarkan dari sifat $A\,A^{-1} = I$. Untuk menentukan solusi dari SPL tersebut maka berdasarkan prosedur yang telah dipelajari sebelumnya, maka dapat dilakukan eliminasi Gauss – Jordan terhadap matriks $[A\,|I]$. Jika A memang memiliki invers maka matriks eselon baris tereduksinya akan berbentuk $[I\,|A^{-1}]$. Jika setelah melakukan eliminasi Gauss–Jordan tidak diperoleh bentuk $[I\,|A^{-1}]$ maka disimpulkan bahwa matriks tersebut tidak memiliki invers.

Contoh 2.7

Diketahui $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} jika ada !

Jawab:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right] = \left[I \mid A^{-1}\right]$$

Jadi $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Contoh 2.8

Diketahui matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Tentukan invers matriks A jika ada!

Jawab:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Walaupun matriks belum dalam bentuk eselon baris tereduksi, tapi perhitungan sudah dapat dihentikan pada tahap ini sudah terlihat bahwa bentuk $[I \,|A^{-1}]$ tidak akan bisa didapatkan sehingga dapat disimpulkan matriks A tidak memiliki invers.

Suatu matriks konstan (A) yang memiliki invers , maka SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ yang berkaitan akan memiliki solusi tunggal yaitu : $A^{-1}b$, jika berupa SPL Homogen maka $\bar{x} = \bar{0}$.

Latihan II

1. Gunakan eliminasi Gauss–Jordan untuk mendapatkan bentuk eselon baris tereduksi dari matriks – matriks berikut:

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tuliskan sistem persamaan linear berikut dalam bentuk matriks kemudian tentukan penyelesaiannya (jika ada)!

   a. $2x + y - z = 1$

      $-3x + 2y = -1$

      $4y - z = 3$

   b. $3x_1 - 3x_4 = -3$

      $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$

      $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1$

      $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$

   c. $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1$

      $x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$

      $x_1 - 12x_2 + x_3 + x_4 = 6$

3. Tentukan invers matriks dari matriks berikut (jika ada)!

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

4. Diketahui persamaan $R\,\bar{x} = \bar{0}$ dengan R matriks konstanta pada nomor 3, Tentukan jenis solusi dari SPL dan tuliskan solusinya!

BAB III
DETERMINAN MATRIKS

A. Definisi Determinan

Misalkan A matriks persegi, fungsi determinan A sering dituliskan sebagai determinan (disingkat det (A) atau |A|) didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A.

Jika A berukuran $\times n$, maka hasil kali elementer dari matriks A akan berbentuk: $a_{1p1}.a_{2p2} \ldots a_{npn}$ dimana $p_1p_2 \ldots p_n$ merupakan permutasi dari bilangan – bilangan $1,2,\ldots,n$. Tanda dari $a_{1p1}.a_{2p2} \ldots a_{npn}$ sendiri ditentukan dari banyaknya bilangan bulat besar yang mendahului bilangan yang lebih kecil (banyaknya invers) pada bilangan $p_1p_2 \ldots p_n$, jika banyaknya invers adalah ganjil maka tandanya negatif (–) dan jika sebaliknya tandanya positif (+).

Contoh 3.1

Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Tentukan det (A)!

Jawab

Banyaknya permutasi 1,2 (karena A berukuran 2×2) = 2 yaitu 12 dan 21 Pada bilangan 12 akan didapatkan banyaknya invers = 0 sehingga tanda untuk hasil kali elementer $a_{11}.a_{22}$ adalah (+), sedangkan untuk hasil kali elementer $a_{12}.a_{21}$ akan bertanda (–) karena pada bilangan 21 terdapat satu angka bulat yang mendahului angka yang lebih kecil.

Jadi det (A) = $+a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = ad - bc$.

Contoh 3.2

Diketahui $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tentukan det (B)!

Jawab

Untuk mempermudah, akan dibuat tabel berikut:

permutasi	Hasil kali elementer	Banyak invers	Hasil kali elementer bertanda
123	$a_{11}.a_{22}.a_{33}$	0	$+a_{11}.a_{22}.a_{33}$
132	$a_{11}.a_{23}.a_{32}$	1	$-a_{11}.a_{23}.a_{32}$
213	$a_{12}.a_{21}.a_{33}$	1	$-a_{12}.a_{21}.a_{33}$
231	$a_{12}.a_{23}.a_{31}$	2	$+a_{12}.a_{23}.a_{31}$
312	$a_{13}.a_{21}.a_{32}$	2	$+a_{13}.a_{21}.a_{32}$
321	$a_{13}.a_{22}.a_{31}$	3	$-a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Jadi, det (B) = $+a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Untuk kasus matriks yang berukuran lebih dari 3x3 , tentunya penentuan nilai determinan dengan menggunakan definisi tersebut menjadi kurang efektif dan lebih rumit. Berdasarkan definisi dari determinan tersebut maka dikembangkan metode perhitungan determinan yang lebih cepat yang akan dibahas dibagian selanjutnya.

B. Metode Perhitungan Determinan

1. Ekspansi Kofaktor

Pada metode ini dikenal beberapa istilah, antara lain:

Minor elemen a_{ij} (M_{ij}) yaitu determinan yang didapatkan dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j matriks awalnya.

Kofaktor elemen a_{ij} (C_{ij}) = $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Jika A matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, maka dengan menggunakan metode ini perhitungan determinan dapat dilakukan dengan dua cara yang semuanya menghasilkan hasil yang sama yaitu:

~ ekspansi sepanjang baris i

$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$

~ ekspansi sepanjang kolom j

$det(A) = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \dots + a_{ni}C_{ni}$

Contoh 3.3

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan det (A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor!

Jawab

Akan dicoba menggunakan ekspansi baris 1 untuk menghitung det (A)

det (A) = $a_{11}C_{11}$ + $a_{12}C_{12}$ + $a_{13}C_{13}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

Jadi $det\ (A)$ = (1 . −1) + (2 . 2) + (3 . −2) = −3

Contoh 3.4

Diketahui $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hitung det (B)!

Jawab

Jika melihat sifat dari metode ini , maka perhitungan akan lebih cepat jika ada elemen a_{ij} yang bernilai 0. Jadi pemilihan baris/ kolom akan sangat menetukan perhitungan.

Dalam contoh ini terlihat bahwa baris/kolom yang mengandung banyak nilai 0 adalah kolom 2. Jadi det (B) akan dapat dihitung secara cepat menggunakan ekspansi terhadap kolom 2.

det (B) = $a_{12}C_{12}$ + $a_{22}C_{22}$ + $a_{32}C_{32}$ = $a_{22}C_{22}$ (karena a12 dan a32 bernilai 0)

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Jadi det(B) = 2 . -2 = -4

2. Reduksi Baris Menggunakan Operasi baris Elementer

Penggunaan metode ini sebenarnya tidak lepas dari metode ekspansi kofaktor yaitu pada kasus suatu kolom banyak mengandung elemen yang bernilai 0. Berdasarkan sifat ini maka matriks yang berbentuk eselon baris atau matriks segitiga akan lebih mudah untuk dihitung nilai determinannya karena hanya merupakan perkalian dari elemen diagonalnya. Reduksi baris dilakukan dengan mengubah kolom – kolom sehingga banyak memuat elemen 0. Biasanya bentuk metriks akhir yang ingin dicapai adalah bentuk eselon baris atau bentuk segitiga tetapi ini tidak mutlak. Jika bentuk eselon atau segitiga belum tercapai tetapi dianggap perhitungannya sudah cukup sederhana maka determinan bisa langsung dihitung. Dalam melakukan reduksi baris operasi yang digunakan adalah operasi baris elementer.

Pada operasi baris elementer ada beberapa operasi yang berpengaruh terhadap nilai determinan awal, yaitu:

- Jika matriks B diperoleh dengan mempertukarkan dua baris pada matriks A maka det (B) = - det (A)
- Jika matriks B diperoleh dengan mengalikan konstanta k ke salah satu baris matriks A maka det (B) = k det (A)
- Jika matriks B didapatkan dengan menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya, maka det (B) = det (A)

Contoh 3.5

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan det (A) dengan menggunakan reduksi baris!

Jawab

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = (-2).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2).1.1.\,3/2 = -3$$

C. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Crammer

Metode Crammer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL yang berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode Crammer jika hasil perhitugan menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$. Penyelesaian yang didapatkan dengan metode ini adalah penyelesaian tunggal.

Diketahui suatu sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dengan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan $\det(A) \neq 0$ sedangkan nilai $\bar{x}$ dan $\bar{b}$ adalah:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka penyelesaian untuk x adalah:

$$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad \overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad \overline{x_n} = \frac{|A_n|}{|A|}$$

A_i adalah matriks A yang kolom ke–i nya diganti dengan vektor $\bar{b}$.

Contoh 3.6

Diketahui sistem persamaan linier berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian SPL?
2. Jika bisa, tentukan penyelesaian untuk *x*

Jawab

a. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-1)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 20) - (6 - 10) = -1$

Karena det (A) = –1 maka metode Crammer dapat digunakan.

b. $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(1)\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 20) - (3 + 5) = -3$

$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 5) + (6 - 10) = 4$

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Jadi nilai untuk *x*, *y* dan *z* adalah:

$$\overline{x_1} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad \overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4 \quad \overline{x_3} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Menentukan invers suatu matriks dapat juga menggunakan rumus berikut:

$A^{-1} = \frac{adj\ (A)}{|A|}$ dimana $adj\ (A) = C^t$ dan $C = \{c_{ij}\}$, c_{ij} = kofaktor elemen a_{ij}

D. Hubungan Determinan, Invers Matriks dan Penyelesaian untuk Sistem Persaman Linier

Jika suatu SPL berbentuk $A\bar{x} = \bar{b}$ dan A matriks persegi, maka sifat dari penyelesaian SPL dapat diketahui dari nilai determinan A atau invers matriks A. Berikut ini adalah hubungan yang berlaku:

$\det(A) \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad A^{-1}$ terde inisi (ada) $\quad \leftrightarrow \quad$ penyelesaian tunggal untuk SPL

$\det(A) = 0 \quad \leftrightarrow \quad A^{-1}$ tidak terde inisi (tidak ada)

$\det(A) = 0 \leftrightarrow$ SPL tidak memiliki penyelesaian

SPL memiliki penyelesaian banyak

Pada kasus $\det(A) \neq 0$ untuk menentukan penyelesaiannya dapat digunakan invers matriks untuk menghitungnya, yaitu $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Sedangkan pada kasus $\det(A) = 0$, untuk menentukan penyelesaian SPL harus digunakan eliminasi Gauss–Jordan pada matriks diperbesar $[A|b]$.

Latihan III

1. Gunakan ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut:

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Gunakan reduksi baris untuk menghitung determinan dari matriks – matriks berikut:

   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Diketahui sistem persamaan linear berikut:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   a. Periksa apakah metode Crammer dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPL?
   b. Jika ya, tentukan nilai untuk *x* !

BAB IV
RUANG – RUANG VEKTOR

A. Ruang – n Euclides

Pada saat pertama kali ilmu vektor dikembangkan , hanya dikenal vektor – vektor di R^2 dan R^3 saja, tetapi dalam perkembangannya ternyata didapatkan permasalahan yang lebih kompleks sehingga dikembangkan vektor – vektor di ruang berdimensi 4, 5 atau secara umum merupakan vektor – vektor di R^n. Secara geometris memang vektor – vektor di R^4 dan seterusnya memang belum bisa digambarkan, tetapi dasar yang digunakan seperti operasi – operasi vector masih sama seperti operasi pada vektor – vektor di R^2 dan R^3. Orang yang pertama kali mempelajari vektor – vektor di Rn adalah Euclidis sehingga vector – vektor yang berada di Rn dikenal sebagai vektor Euclidis, sedangkan ruang vektornya disebut ruang –n Euclidis.

Operasi standar / baku pada vektor Euclidis

Diketahui $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor – vektor di ruang –n Euclidis dengan

$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\bar{v} = (v_1, v, \dots, v_n)$

Penjumlahan vektor

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

Perkalian titik

$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + \cdots + u_n . v_n)$

Perkalian dengan skalar

$k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$

Panjang vektor

$\|\bar{u}\| = (\bar{u}.\bar{u})^{1/2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2}$

Jarak antara vektor

$d(\bar{u}, \bar{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

Contoh 4.1

Diketahui $\bar{a} = (2,1,2,1)$ dan $\bar{b} = (1,1,2,2)$

Tentukan jarak antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Jawab

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

B. Ruang vektor umum

Selama ini kita telah membahas vektor – vektor di Rn Euclides dengan operasi – operasi standarnya. Sekarang akan membuat konsep tentang ruang vector dengan konsep yang lebih luas.

Ada 10 syarat agar V disebut sebagai ruang vektor, yaitu:

1. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ maka $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$
4. $\exists 0 \in V$ sehingga $\forall \bar{u} \in V$ maka $0 + \bar{u} = \bar{u}$ dan $\bar{u} + 0 = \bar{u}$
5. $\forall \bar{u} \in V, \exists -\bar{u} \in V$ sehingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = 0$ dan $(-\bar{u}) + \bar{u} = 0$
6. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k$adalah scalar maka $k\bar{u} \in V$
7. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k$ adalah skalar maka $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
8. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k, l$ adalah skalar maka $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
9. $\forall \bar{u} \in V$ dan $\forall k, l$ adalah skalar maka $(kl)\bar{u} = k(l\bar{u})$
10. $\forall \bar{u} \in V$ maka $1\bar{u} = \bar{u}$ dan $\bar{u}1 = \bar{u}$

Dalam hal ini tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vector atau tidak adalah operasi – operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri. Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi – operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar, tentunya V harus memenuhi 10 syarat diatas, jika satu saja syarat tidak dipenuhi maka tentunya V bukan merupakan ruang vektor.

Contoh 4.2

Tunjukkan bahwa V yaitu himpunan matriks yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}$dengan operasi standar bukan merupakan ruang vektor, $a, b, c \in R$!

Jawab

Untuk membuktikan V bukan merupakan ruang vektor adalah cukup dengan menunjukkan bahwa salah satu syarat ruang vektor tidak dipenuhi. Dan syarat pertama ternyata tidak dipenuhi. Sehingga untuk menunjukkannya, kita cukup memberikan satu contoh kontradiksi, yaitu:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in V$ dan $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in V$ maka $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \notin V$

Jadi V bukan merupakan ruang vektor

C. Sub–ruang vektor

Diketahui V ruang vektor dan U subhimpunan V. Kemudian U dikatakan sub – ruang dari V jika memenuhi dua syarat berikut:

1. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in U$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in U$
2. $\forall \bar{u} \in U$ dan $\forall k$adalah scalar maka $k\bar{u} \in V$

Contoh 4.3

Diketahui: $V = R^3$

$U = \{(a, b, c) | b = a + c, a, b, c \in R\}$

Tunjukkan bahwa U sub-ruang V.

Jawab

1. Ambil sebarang $\bar{u}, \bar{v} \in U$ akan dibuktikan $\bar{u} + \bar{v} \in U$

   Misal $\bar{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dengan $b_1 = a_1 + c_1$

   $\bar{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dengan $b_2 = a_2 + c_2$

   $\bar{u} + \bar{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ dengan $b_1 + b_2 = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2)$

   $b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$

   Ini berarti terbukti bahwa $\bar{u} + \bar{v} \in U$
2. Ambil sebarang $\bar{u} \in U$ dan k sebarang skalar akan dibuktikan $k\bar{u} \in U$

   Misal $\bar{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dengan $b_1 = a_1 + c_1$

   $k\bar{u} = k(a_1, b_1, c_1) = (ka_1, kb_1, kc_1)$ dengan $kb_1 = k(a_1 + c_1)$

   $kb_1 = ka_1 + kc_1$

   Ini berarti terbukti bahwa $k\bar{u} \in U$

Dari 1 dan 2, maka U sub-ruang V

D. Kombinasi linier

Vektor $\bar{v}$ dikatakan merupakan kombinasi linier dari vektor – vector $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ jika $\bar{v}$ dapat dinyatakan sebagai:

$\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \cdots + k_n\bar{v}_n$ dengan $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah skalar

Contoh 4.4

(9, 2, 7) adalah kombinasi linear dari (1, 2, -1) dan (6, 4, 2), sebab:

(9, 2, 7) = -3 (1, 2, -1) + 2 (6, 4, 2)

Contoh 4.5

Diketahui $\bar{a} = (1,2), \bar{b} = (-2,-3)$ dan $\bar{c} = (1,3)$

Apakah $\bar{c}$ merupakan kombinasi linier dari $\bar{a}$ dan $\bar{b}$?

Jawab

Misalkan $\bar{c}$ merupakan kombinasi linier dari $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, maka dapat ditentukan nilai untuk k_1 dan k_2 dari persamaan $\bar{c} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b}$

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

Digunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linier di atas, yaitu:

$$\left[A \mid \bar{b}\right] = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\2 & -3 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Diperoleh,

$$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

Nilai k_1 dan k_2 bisa diperoleh, jadi $\bar{c}$ merupakan kombinasi linier dari $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ yaitu

$\bar{c} = 3\bar{a} + \bar{b}$

E. Membangun

Diketahui V ruang vektor dan $S = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_n\}$ dimana $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n \in V$. S dikatakan membangun V jika:

$\forall \bar{v} \in V$, maka v merupakan kombinasi linier dari S, yaitu:

$\bar{v} = k_1\bar{s}_1 + k_2\bar{s}_2 + \cdots + k_n\bar{s}_n$ dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar

Contoh 4.6

Periksa apakah $S = \{(1,2), (1,3)\}$ membangun R^2!

Jawab

Ambil sebarang $\bar{u} \in R^2$, Misal $\bar{u} = (a, b)$, maka

$$\begin{aligned}(a, b) &= k_1(1,2) + k_2(1,3)\\ &= (k_1, 2k_1) + (k_2, 3k_2)\\ &= (k_1 + k_2, 2k_1 + 3k_2)\end{aligned}$$

$a = k_1 + k_2 \rightarrow k_1 = a - k_2$

$b = 2k_1 + 3k_2$

$b = 2(a - k_2) + 3k_2$

$b = 2a - 2k_2 + 3k_2$

$b = 2a + k_2 \rightarrow k_2 = b - 2a$

$k_1 = a - k_2$

$k_1 = a - (b - 2a)$

$k_1 = 3a - b$

Karenaa diperoleh $k_1 = 3a - b$ dan $k_2 = b - 2a$, ini berarti $S = \{(1,2), (1,3)\}$ membangun R^2

F. Bebas Linear

Vektor – vektor di S dikatakan bebas linier jika persamaan

$\bar{0} = k_1\bar{s}_1 + k_2\bar{s}_2 + \cdots + k_n\bar{s}_n$ hanya memiliki penyelesaian $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ (atau jika diubah ke bentuk SPL, penyelesaiannya adalah trivial), jika ada penyelesaian lain untuk nilai $k_1, k_2, \ldots, k_n$selain 0 maka dikatakan vektor – vektor di S bergantung linier.

Contoh 4.7

Periksa apakah $S = \{(1,2), (1,3)\}$ bebas linear!

Jawab

$(0,0) = k_1(1,2) + k_2(1,3)$

$\quad = (k_1, 2k_1) + (k_2, 3k_2)$

$\quad = (k_1 + k_2, 2k_1 + 3k_2)$

$0 = k_1 + k_2 \rightarrow k_1 = -k_2$

$0 = 2k_1 + 3k_2$

$0 = 2(-k_2) + 3k_2$

$0 = -2k_2 + 3k_2$

$0 = k_2 \rightarrow k_2 = 0$

$k_1 = -k_2$

$k_1 = 0$

Karena diperoleh $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$, ini berarti $S = \{(1,2), (1,3)\}$ bebas linear

G. Basis

Misalkan V ruang vektor dan $S = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots \bar{s}_n\}$. S disebut basis dari V jika memenuhi dua syarat, yaitu:

1. S bebas linier
2. S membangun V

Contoh 4.8

Berdasarkan contoh 4.6 dan contoh 4.7 maka $S = \{(1,2), (1,3)\}$ dari R^2

Latihan IV

1. Tentukan apakah W dengan operasi standar merupakan sub–ruang M_{22}, jika

   $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a = -d, a, b, c, d \in R \right\}$

2. Tentukan apakah W dengan operasi standar merupakan sub–ruang M_{22}, jika

   $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$

3. Diketahui: $U = \{A, B, C, D\}$

   $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

   a. Apakah U membangun M_{22}?
   b. Apakah U bebas linear?
   c. Apakah U basis M_{22}?

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2002. *Dasar – Dasar Aljabar Linear Jilid 1*. Tangerang: Binarupa Aksara

Sibaroni, Yuliant. 2002. *Buku Ajar Aljabar Linear*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom